Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning

Gregersen, Per; Højgaard Jensen, Thomas

Publication date:
1998

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Gregersen, P., & Højgaard Jensen, T. (1998). *Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA Nr. 353 http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/

TEKST NR 353 1998

Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning

Specialerapport af

Per Gregersen og
Tomas Højgaard Jensen

Vejleder: Morten Blomhøj

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, RUC, Postboks 260, 4000 Roskilde, Danmark

Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning

Af Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

IMFUFA tekst nr. 353/98, 181 sider, ISSN 0106-6242

Denne rapport er resultatet af et speciale-arbejde gennemført i perioden februar 1997 til juni 1998 på Institut for Matematik og Fysik samt deres funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelser (IMFUFA), Roskilde Universitetscenter.

Indholdsmæssigt er der tale om arbejde indenfor forskningsområdet *matematikkens didaktik.* I rapporten interesserer vi os således for, hvilke potentialer *problemløsning* og *modellering* kan siges at have som aktiviteter i en almendannende matematikundervisning. På grund af vores egne erfaringer hermed, tages der afsæt i gymnasiets matematikundervisning.

Analysen heraf falder i tre dele. Først analyserer vi, hvordan man konstruktivt kan *karakterisere problemløsning og modellering som begreber*, og hvordan en sådan karakteristik kan bruges ift. udvalgte opgaver på gymnasialt niveau. Derefter diskuterer vi problemløsning og modellerings potentialer på baggrund af, hvad vi betegner *en ekstern og intern matematikfaglig analyse.* Dermed mener vi en analyse af hhv. det omgivende samfunds og matematikersamfundets syn på matematik som videnskab og som undervisningsfag. Analysens tredje del vurderer ligeledes problemløsning og modellerings potentialer, denne gang på baggrund af *en kognitions-psykologisk analyse.*

Abstract

I dette speciale interesserer vi os for, hvilke potentialer *problemløsning* og *modellering* kan siges at have som aktiviteter i en almendannende matematikundervisning. På grund af vores egne erfaringer hermed, tages der afsæt i gymnasiets matematikundervisning.

Analysen heraf falder i tre dele. Først analyserer vi, hvordan man konstruktivt kan *karakterisere problemløsning og modellering som begreber*, og hvordan en sådan karakteristik kan bruges ift. udvalgte opgaver på gymnasialt niveau. Derefter diskuterer vi problemløsning og modellerings potentialer på baggrund af, hvad vi betegner *en ekstern og intern matematikfaglig analyse*. Dermed mener vi en analyse af hhv. det omgivende samfunds og matematikersamfundets syn på matematik som videnskab og som undervisningsfag. Analysens tredje del vurderer ligeledes problemløsning og modellerings potentialer, denne gang på baggrund af *en kognitions-psykologisk analyse*.

De væsentligste konklusioner er følgende: a) Afklaring af indholdet i begreberne problemløsning og modellering er *i sig selv* væsentligt som baggrund for et reflekteret valg af opgavetyper i matematikundervisningen. b) Vurdering af *modellerings potentialer* fører som det væsentligste tilbage til en afklaring af, hvad årsagen er til, at man vælger at udbyde matematikundervisning til en given befolkningsgruppe. I forhold til et ønske om at udvikle elevernes *demokratiske kompetence*—hvilket vi ser som det væsentligste karakteristika for den nutidige gymnasiale matematikundervisning—har modellering et stort potentiale. c) Vurdering af *problemløsnings potentialer* fører som det væsentligste tilbage til, hvilken form for læring man ønsker at fremme. I forhold til et ønske om at fremme *relationel læring* har problemløsning et stort potentiale.

Afslutningsvis perspektiverer vi analyserne ved at pege på, hvad vi selv ser som en naturlig opfølgning på vores arbejde. Det består som det væsentligste i at undersøge, *hvordan* problemløsning og modellering *i praksis* kan komme til at udgøre en bærende del af en almendannende matematikundervisning, og vi peger derfor på nogle problemstillinger, der i den forbindelse nok er værd at analysere nærmere.

Indhold

II Opfattelser af matematik og matematikundervisning 43

Del I

Indledning og begrebsafklaring

Kapitel 1

Indledning

1.1 Problemfelt

Forestil dig, at du sidder og skal planlægge et undervisningsforløb i matematik, som du efterfølgende skal gennemføre sammen med en gruppe 15–20 årige gymnasieelever. Som skolet indenfor faget matematik er du selvfølgelig klar over, at opgaveløsning bør være en central del af undervisningen. Det er et matematik-pædagogisk dogme, som man nok får svært ved at finde opponenter til, og desuden har du fra dit eget arbejde med nyt stof erfaring for, at opgaveløsning fremmer forståelsen af nye begreber og metoder. Spørgsmålet er imidlertid, *hvordan* arbejdet med forskellige typer opgaver mest hensigtsmæssigt integreres i undervisningen. Prøv som udgangspunkt for en diskussion heraf at se på følgende opgaver:

Opgave 1. Koncentrationen af sukker i blodet er hos raske mennesker 100 mg pr. 100 ml blod. Ved at indsprøjte en bestemt dosis insulin ændres koncentrationen af blodsukkeret. Koncentrationen, målt i mg pr. 100 ml, er en funktion, f, af tiden, x, der er forløbet siden indsprøjtningen. Vi antager at

$$f(x) = 100 + 111(e^{-4x} - e^{-0,8x})$$

Bestem det tidspunkt hvor koncentrationen af blodsukker hurtigst forøges.

Opgave 2. Løs ligningen

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Opgave 3. Hvad er sammenhængen mellem sinusrelationerne og en trekants omskrevne cirkel?

Opgave 4. Et teater hæver billetprisen med 30%. Det medfører at den samlede billetindtægt stiger med 17%. Med hvor mange procent har publikumstallet ændret sig?

Opgave 5. Hvad er sammenhængen mellem din indtægt, og den skat du betaler?

På hvilke måder adskiller de sig fra hinanden? Er de repræsentative for forskellige typer af opgaver? I så fald, hvilken plads kan hver type siges at have i et traditionelt undervisningsforløb i gymnasiet? Hvilke kompetencer lægger de hver især op til at udvikle? Hvilke roller bør de hver især spille i gymnasiematematikken?

Hvis du finder spørgsmål som disse interessante at overveje—enten fordi du som matematiklærer på de gymnasiale ungdomsuddannelser[1] rent faktisk ofte sidder og skal planlægge et undervisningsforløb, eller fordi du af andre grunde interesserer dig for, hvilke overvejelser der ligger eller bør ligge bag matematikundervisningens praksis—så vil du i denne rapport finde en diskussionslysten sparringspartner og/eller inspirator, alt afhængig af hvor meget du på forhånd har tænkt over de spørgsmål, vi tager op til nærmere undersøgelse.

I den vinkling, vi vælger at lægge på ovenstående meget brede spørgsmål, indgår begrebet *modellering* som noget helt centralt. Vi vil senere indgående diskutere, hvad vi mener dette begreb dækker over, men først vil vi—for at gøre det klart i hvilken sammenhæng, rapporten tænkes at indgå—forsøge at forklare, hvorfor vi finder en vinkling med dette fokus både relevant og spændende. Denne forklaring starter med et kig på de rammer, der fra Undervisningsministeriets side er sat for gymnasiets matematikundervisning, samt hvordan vi mener, disse rammer bruges som mod- og medspiller af matematiklærerne.

[1]Med *de gymnasiale ungdomsuddannelser* mener vi uddannelser for unge i sidste halvdel at teenageårene, der ikke som udgangspunkt er direkte erhvervsrettede, men har et mere almendannende og studieforberedende sigte, typisk det treårige gymnasieforløb, to- eller treårige studenterkurser eller den toårige HF-uddannelse.

Det er det almendannende, der er det afgørende i vores afgrænsning af målgruppen. Heri ligger, at vi bestemt også mener, denne rapport vil være relevant læsning for matematikinteresserede med tilknytning til voksenuddannelse eller erhvervsrettede ungdomsuddannelser, i det omfang der i større eller mindre grad eksisterer et ønske om at virke almendannende i forhold til matematikundervisningen. Blot vil vi ikke forholde os til de specielle problemfelter, der optræder i forbindelse med uddannelse af voksne og/eller uddannelser med et blandet erhvervsmæssigt og almendannende sigte.

1.1.1 Gymnasiehverdagen

Tilbage i rollen som tilrettelægger af gymnasial matematikundervisning, får du i Undervisningsministeriets gymnasiebekendtgørelse (fremover blot kaldet bekendtgørelsen) at vide, at formålet med undervisningen på obligatorisk niveau[2] på matematisk linje er

> a) at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder, og
>
> b) at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder.
>
> [UVM 97a, p. 9]

Opsplitningen i to delformål kan ses som et forsøg på at beskrive det dobbelte sigte med undervisningen, som specielt *de gymnasiale ungdomsuddannelser* har; eleverne skal gerne opnå kompetencer af både almen og studieforberedende karakter. Punkt a) ovenfor er med denne opsplitning overvejende af studieforberedende karakter, mens punkt b) mest sigter mod de mere almene kompetencer. En sådan fortolkning af formålsbeskrivelsen understøttes af den ministerielle undervisningsvejledning, der for hvert fag udgives som læsevejledning til bekendtgørelsen [UVM 97b], hvor der også opereres med en opsplitning på almene og studieforberedende kompetencer. Indholdet af

[2]Med den bekendtgørelsesændring, der trådte i kraft pr. 26. maj 1997, kan eleverne allerede efter 1.g. vælge at tage matematik på højt niveau. Når vi i denne præsentation af gymnasiehverdagen vælger at koncentrere os om det obligatoriske niveau på matematisk linje (hvilket i øvrigt svarer til højt niveau for sproglig linje), skyldes det to ting. For det første forventes det—der er pt. ingen erfaringer at trække på—at ca. 2/3 af eleverne vil gennemgå det obligatoriske niveau både i 1. og 2.g., hvorfor det altså er hovedparten af elevernes og matematiklærernes hverdag, vi beskriver. For det andet ligger forskellen på de to niveauer ifølge bekendtgørelsen primært i mængden af faglige begreber, der forventes behandlet i undervisningen. Omtalen af aspekterne, som vi senere skal komme ind på, er således næsten identisk, og for formålsbeskrivelsens vedkommende er der på højt niveau blot tilføjet et punkt c) til de to punkter på obligatorisk niveau. Dette punkt lyder: "at eleverne udvikler deres evne til selvstændigt at benytte matematiske begreber og metoder og bliver i stand til at sætte sig ind i, analysere og vurdere problemkredse, der kan formuleres og bearbejdes ved hjælp af matematiske begreber og metoder." Da denne udbygning af formålet med matematikundervisningen fra obligatorisk til højt niveau i gymnasiet må vurderes som en skærpelse af fordringerne i punkt b), ville vores efterfølgende fortolkning af meningen med formålsbeskrivelsen blot få større berettigelse, hvis vi valgte at tage udgangspunkt i gymnasiets højeste matematikniveau. Vi mener derfor ikke, der ligger nogen indsnævring af problemfeltet i at fokusere på det obligatoriske niveau hvad formålsbeskrivelsen angår, tværtimod.

punkt a) knyttes til det studieforberedende i skikkelse af en eventuel fortsættelse på A-niveau, og med tydelig adresse til punkt b) hedder det tilsvarende:

> "For mange elever er gymnasiets matematikundervisning deres sidste egentlige uddannelse i matematik. Med samfundets stigende anvendelse af matematik, ikke kun i teknik og produktion, men også som baggrund for prognoser, planlægning, beslutningstagen og styring, er det derfor af almen betydning, at eleverne igennem undervisningen både bliver i stand til selv at udnytte matematiske betragtningsmåder og til at vurdere anvendelser af matematik, som de møder i deres hverdag." [UVM 97b, p. 1]

Denne beskrivelse af det ønskede forhold mellem matematikundervisningen og elevernes hverdag er vi så enige i, at ordlyden ikke ville være meget anderledes, hvis vi selv havde skrevet den. Når vi alligevel ikke bare stopper her, glade og tilfredse med ministeriets oplæg, er det fordi vi har en formodning om, at der på dette punkt er langt fra ide til udførelse. Uden i første omgang at reflektere over, hvad der konkret foregår i undervisningen, bygger denne formodning dels på uformel snak med adskillige nuværende gymnasielærere, dels på egne erfaringer som undervisere, og dels på en subjektiv vurdering af undervisningens slutprodukt; kompetencerne hos den del af befolkningen, der har modtaget gymnasial matematikundervisning. Som vi ser det, er det svært at konkludere andet end, at det er et fåtal af studenterne, der generelt lever op til ovenstående fordring, både hvad angår evne til selv at anvende matematiske betragtningsmåder og til at vurdere andres anvendelser. Med reference til de fem opgaver, vi indledningsvist gav som udgangspunkt for undervisningens tilrettelæggelse, kan vi derfor føje til rækken af spørgsmål, det nok er frugtbart at tænke over: Er der en sammenhæng mellem valg af opgavetyper, og studenternes evne til efterfølgende at nyttiggøre matematikken i deres hverdag? I så fald, hvilke af de fem opgaver er bedst med til at give eleverne denne kompetence?

Bekendtgørelsen og vejledningens forsøg på at skabe sammenhæng mellem formålene for og udbyttet af matematikundervisningen, er meget forskellig for de to delmål. I forhold til a) specificerer bekendtgørelsen fem overordnede emner[3], og inden for hvert emne nævnes eksplicit en lang række faglige begreber, der med varierende tyngde skal inkluderes i undervisningen. Hvilke begreber og metoder, der fanges af mængdegeneratoren "fundamentale"—jvf. ordlyden af punkt a)—er altså givet på forhånd, så det slipper du for

[3]De fem emner har overskrifterne tal, geometri, funktioner, differentialregning samt statistik og sandsynlighedsregning [UVM 97a, pp. 10–11].

at bekymre dig om i din tilrettelæggelse, hvad enten du oplever det som en lettelse eller ej.

Til gengæld er der meget vide rammer med hensyn til formålsbeskrivelsens punkt b). Hvordan du sikrer dig, at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et redskab til at løse problemer med, hvilket kan siges at være essensen i anden del af formålsbeskrivelsen, er i høj grad op til dig. Bekendtgørelsen nævner tre aspekter af matematik som fag, der skal indgå i undervisningen: Det historiske aspekt, modelaspektet og matematikkens indre struktur. Specielt eksistensen af modelaspektet kan tolkes som et forsøg på at hjælpe/tvinge den enkelte lærer til at tilrettelægge sin undervisning, så eleverne opnår en sådan fortrolighed, idet den uddybende omtale af dette aspekt lyder:

> "Eleverne skal opnå kendskab til opbygning af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger samt blive i stand til i simple situationer selv at gennemføre en modelleringsproces." [UVM 97a, p. 11]

De efterfølgende bemærkninger om implementeringen af disse hensigter er imidlertid ikke til megen hjælp hvad angår tilrettelæggelsen af undervisningen:

> "Behandlingen af de tre aspekter sker i forbindelse med behandlingen af de fem hovedemner og gennem særlige undervisningsforløb tilrettelagt med henblik på et eller flere af aspekterne. Omfanget af sådanne forløb er tilsammen mindst 20 lektioner, idet mindst 10 af disse skal udgøre et sammenhængende forløb." [UVM 97a, p. 13]

Med angivelse af minimumsgrænser virker de tre aspekter snarere som et forsøg på at tvinge selv tvivlere til at inkludere de tre perspektiver på faget i undervisningen, end som støtte for matematiklærere, der faktisk ønsker at gennemføre en bredt perspektiveret undervisning. I forhold til sikringen af anvendelseskompetencen, som vi sammenfattende kan kalde punkt b), er du altså på godt og ondt temmelig frit svævende med hensyn til den forestående undervisningstilrettelæggelse.

1.1.2 Vores baggrund

Vores baggrund for at interessere os for matematikundervisningens praksis med særlig fokus på begrebet modellering er tosidet. For det første har vi

begge gennem en årrække været årsvikarer på deltid i matematik i gymnasiet; heraf vores specielle interesse for undervisning på dette uddannelsestrin. Vi har derfor aktuelt siddet med den planlægningsopgave, som du netop blev bedt om at tænke dig ind i, ligesom vi gennem diskussion med vores kollegaer har haft mulighed for at få en fornemmelse af, hvilke overvejelser andre matematiklærere lægger til grund for deres tilrettelæggelse af undervisningen.

For det andet afslutter udfærdigelsen af rapporten her for os begge kandidatuddannelsen i matematik på Roskilde Universitetscenter (RUC). Studiet her har selvfølgelig understøttet en interesse for matematik snævert betragtet. Mindre indlysende, men i denne sammenhæng nok så vigtigt, er det, at studiet også har gødet en interesse for undervisningsmæssige forhold, og skabt en interesse for modellering.

At vores interesse for undervisningsmæssige forhold er blevet understøttet af vores studier, skyldes to specielle forhold ved RUC's matematikuddannelse. For det første det at det foregår på RUC, hvis væsentligste eksistensberettigelse kan siges at være en anderledes tilrettelæggelse af studierne; det så berømte/berygtede problemorienterede projektarbejde. Som studerende her er det derfor nærliggende at fundere over, hvilke fordele og ulemper der er ved forskellige måder at lære nyt stof på. For det andet er "indsigt i og erfaring med [...] formidling af og/eller undervisning i matematikken og dens aspekter" [RUC 96, p. 1] et ud af tre erklærede formål med kandidatuddannelsen i matematik på RUC, hvorfor der er ansat lærere med speciel kompetence indenfor dette område, som sørger for, at der både i formelt og uformelt regi diskuteres emner med relevans for matematikundervisning og anden formidling af matematik.

Indsigt i og erfaring med matematiske modeller er en anden af de tre erklærede formål med uddannelsen.[4] Det har betydet, at arbejde med matematiske modeller uden for matematikkens verden er en obligatorisk del af uddannelsen, ligesom der også løbende finder en diskussion heraf sted lærere og studerende imellem. Disse forhold har tilsammen gjort os interesserede i at arbejde med begrebet modellering.

Der er således sammenfald mellem på den ene side kravet til gymnasiematematikken om at arbejde med modeller, uden nærmere diskussion af omstændighederne herfor, og på den anden side de dele af faget matematik bredt betragtet, som interesserer os, og som vi føler os kvalificerede til at bidrage konstruktivt til en diskussion af. Den tro på at kunne give et værdifuldt indspark til gymnasiematematikkens udformning, som naturligt følger af dette sammenfald, understøttes af, at vores dobbeltrolle som matematik-

[4]Det tredje formål vedrører indsigt i fagets videnskabsteoretiske status og historiske udvikling.

lærere i gymnasiet og deltagere i teoretiske diskussioner af matematikkens didaktik[5], naturligt placerer os med et ben på hver side af den kløft, der ofte er mellem den enkelte matematiklærers praktiske arbejde på den ene side, og den seneste forsknings resultater i form af ideer og mere overordnede forslag til ændringer på den anden.

At denne kløft eksisterer, er man helt klar over i forskerverdenen. Et af de centrale problemfelter indenfor matematikkens didaktik angår netop spørgsmålet om, hvordan man bedre sikrer et konstruktivt samspil mellem teori og praksis[6], og det er indenfor dette problemfelt, vi forestiller os, vores arbejde ligger.

1.1.3 Vores tilgang

Efter at have redegjort for hvordan vi oplever gymnasiehverdagen og vores egen baggrund, kan vi nu præcisere hvilken problemstilling, der i udgangspunktet fangede vores interesse.

At dømme efter det krævede model-aspekt i den nuværende bekendtgørelse, har man fra officiel side allerede erkendt, at arbejde med modeller har *noget* at give matematikundervisningen i gymnasiet. Alligevel er vi som nævnt temmelig overbeviste om, at det kun er i meget få tilfælde, at eleverne bare tilnærmelsesvis opnår de kompetencer, som ifølge bekendtgørelsens generelle formålsbeskrivelse og specifikke bemærkninger til modelaspektet synes at være målet hermed. Der er givetvis en vis andel af gymnasiets matematiklærere, der af den ene eller anden grund godt kan se en pointe i at

[5]Didaktik som forskningsfelt er udtryk for en bred tilgang til spørgsmål vedr. formidling, hvor spørgsmål direkte relateret til undervisningens praksis er en ægte delmængde. Mogens Niss forsøger at indkredse matematikkens didaktik med følgende definition:

> "Matematikkens didaktik er det videnskabelige arbejdsfelt, der søger at identificere, karakterisere og forstå de fænomener og processer der indgår—eller kunne indgå—i både faktisk og potentiel matematikundervisning og matematiktilegnelse. Med hensyn til forståelse af sådanne fænomener og processer står bestræbelser på at afdække mekanismer og årsagssammenhænge i centrum" [Niss 93, p. 100].

[6]F.eks. eksisterer der en international gruppe af forskere, populært kaldet *The SCTP Group* (Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education), der på initiativ af danskeren Bent Christiansen siden 1984 jævnligt har afholdt konferencer og udgivet tilhørende rapporter. Se evt. forordet til den femte konferencerapport herfra (Bazzini, Luciana (ed.): *Theory and Practice in Mathematics Education* (SCTP 5), Pavia, Italien, 1994) for en nærmere præsentation af ideen bag dette initiativ. For en generel diskussion af teori vs. praksis i matematikkens didaktik, se Blomhøj, Morten: *Samspil mellem teori og praksis—en forskningspraksis i matematikkens didaktik*, Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole, 1992.

arbejde med modeller i undervisningen, men aldrig systematisk har overvejet, hvordan opnåelsen af de modelrelaterede kompetencer sikres bedst muligt. En tænkt række spørgsmål fra disse lærere, som vi gerne vil bidrage til besvarelsen af, er derfor: "Jeg gennemfører allerede trofast mod bekendtgørelsen et forløb om modeller hvert år. Alligevel føler jeg, at mine elever kort efter forløbets ophør er tilbage på næsten samme vidensniveau, som før vi startede. *Hvorfor?* Jeg kunne selvfølgelig vælge at bruge langt mere tid på model-aspektet, end dette enkelte forløb på nogle få uger, men så får jeg problemer med at nå det mere snævre matematiske pensum. *Hvordan* kan jeg tilrettelægge min undervisning, så eleverne i højere grad får både i pose og sæk?"

Det er vores indtryk, at den frustration i forhold til anvendelsen af matematiske modeller i undervisningen, vi her forsøger at karakterisere, opleves af mange matematiklærere i gymnasiet. Samtidig er der et udtalt ønske om at bibringe gymnasieeleverne kompetence i at anvende den matematik, de lærer, dels fra officielt hold udtrykt ved formålsbeskrivelsen, men som vi oplever det også blandt mange elever og lærere. Det er kombinationen af disse to forhold, der i udgangspunktet fangede vores interesse, da vi selv tror, der er en sammenhæng: Kan man ikke tilrettelægge arbejdet med matematiske modeller i gymnasiets matematikundervisning på en måde, der i højere grad, end det i øjeblikket synes at være tilfældet, tilgodeser ønsket om at udvikle elevernes anvendelseskompetence?

I relation til valg af opgavetyper, som eleverne sættes til at arbejde med, kan vi indtil videre afrunde rækken af spørgsmål, som det er værd at have i baghovedet, med følgende, jvf. de fem opgaver på side 11: Hvilke opgaver kræver brug af en matematisk model? Hvilke, om nogen, kan bedst sikre opnåelse af de kompetencer, man ønsker at udvikle hos eleverne gennem arbejdet med modeller, jvf. omtalen af bekendtgørelsens model-aspekt?

1.2 Afgrænsninger og problemformulering

Der er mange både spændende og relevante tilgange til at analysere forhold vedrørende praktisk gennemførelse af matematikundervisning på et givet uddannelsesniveau. En måde at strukturere diskussionen på, er at tænke på de mange spørgsmål, der springer frem, som faldende i tre kategorier: Spørgsmål vedrørende *hvorfor* der (bør) gennemføres matematikundervisning, spørgsmål vedrørende *hvad* der (bør) undervises i, og spørgsmål vedrørende *hvordan* der (bør) undervises.[7] Denne struktur har vi selv haft gavn af som "tanke-ordner",

[7] Se [Niss 89] for en god diskussion af matematiske modellers rolle i undervisningen struktureret efter disse retningslinjer.

men som udgangspunkt for en diskussion af vores valg i forbindelse med de mange relevante tilgange, har vi fundet det formålstjenligt at detaljere kategoriseringen en smule, så den også kan bruges til at skelne mellem hvilke forskellige former for indsigt, der ligger til grund for analyser inden for hver kategori. Det er blevet til fire typer af spørgsmål, som tilsammen virker som et godt bud på en udspænding af matematikundervisning som problemfeltet:

Spørgsmål vedrørende begrundelser for matematikundervisningen: Spørgsmål af denne type omhandler *hvorfor* matematikundervisning udbydes af samfundet til givne befolkningsgrupper. For eksempel "hvilke behov hos den enkelte borger ønsker man at tilgodese og/eller udvikle gennem matematikundervisningen?", "hvilke samfundsmæssige behov ønskes tilgodeset gennem matematikundervisningen?", "hvilken udvikling hos den enkelte og/eller i samfundet som helhed ønsker man at fremme ved at tilbyde/påtvinge en bestemt befolkningsgruppe matematikundervisning?", mv..

Matematiske spørgsmål: Spørgsmål af denne type rummer to "niveauer". Mest overordnet er filosofisk orienterede spørgsmål, som kort kan siges at vedrøre, hvad der *karakteriserer* matematikkens natur. Det kan være spørgsmål som "hvad er matematik overhovedet?", "hvilken status har matematiske objekter?", "hvordan genereres matematisk erkendelse?", "hvad konstituerer matematisk sandhed?", mv..

I forlængelse heraf følger mere praktisk orienterede spørgsmål, der er specifikke ift. en given målgruppe, idet de vedrører diskussionen om, *hvad* der på et givet niveau skal være matematikundervisningens genstandsfelt. Det kan fx. være "hvilke matematiske discipliner skal præsenteres, og med hvilken tyngde?", "er der fagligt begrundede retningslinjer for en bestemt rækkefølge at introducere stoffet i?", mv..

Lærings-teoretiske spørgsmål: Denne type spørgsmål kan sammenfattende siges at vedrøre, hvad *betingelserne* er for, at effektiv læring af matematik kan finde sted. For eksempel "hvordan opbygges en matematisk begrebsstruktur hos den enkelte?", "hvad vil det sige at vide og huske?", "hvilke følelser aktiveres ifm. forskellige former for læring af matematik?", "er disse følelser specielle for læring af matematik, eller er de mere generelt knyttet til lærings-situationen?", mv..

Pædagogiske spørgsmål: Her er der igen tale om spørgsmål på to "niveauer", der begge handler om *hvordan* matematikundervisningen på et givet niveau tilrettelægges og realiseres indenfor en bestemt reference-ramme. Det mest overordnede niveau vedrører det perspektiv, der ligger bag om undervisningen, og har således de begrundelsesrelaterede og matematiske problemtyper som reference-ramme. Spørgsmål af denne type handler derfor om, med henblik på hvilke mål en given gruppe skal undervises i et givet matematisk indhold, fx. "hvordan tilrettelægges og realiseres gymnasieundervisning i analytisk geometri, der imødekommer den almendannende begrundelse?", "hvordan tilrettelægges og realiseres gymnasieundervisning i differentialregning, der tager afsæt i en platonistisk opfattelse af matematik?", mv..

Det andet "niveau" af pædagogiske spørgsmål har de læringsmæssige betingelser som reference-ramme. Denne tilgang omfatter spørgsmål om, hvordan man tilvejebringer de nødvendige forudsætninger for læring i en given undervisningssituation, fx. "hvordan bør moderne informations-teknologi anvendes i gymnasiets matematikundervisning, for ikke at give eleverne en overfladisk forståelse af selve de matematiske begreber?", "hvordan kan gruppearbejde bedst bruges til at fremme den mundtlige dimension i gymnasiets matematikundervisning?", mv..

1.2.1 Valg af analytisk udgangspunkt

I forhold til vores ønske om at bidrage til en mere hensigtsmæssig tilrettelæggelse af arbejdet med matematiske modeller i den gymnasiale matematikundervisning, ville det efter vores mening oplagt være frugtbart at inddrage analyser med afsæt i alle de nævnte typer af spørgsmål.

At forsøge sig med en sådan helhedsanalyse ligger imidlertid langt uden for rammerne af dette projekt, forstået på den måde, at vi ikke *systematisk* kan angribe problemet fra alle de nævnte vinkler. De rummer formentlig hver især stof til adskillige specialer og Ph.d.-afhandlinger indenfor såvel matematikkens didaktik som tilgrænsende fagområder såsom pædagogik og psykologi.

Den afgrænsning af målet med analysen, der derfor er nødvendig, har vi ladet styre af, hvordan vi opfatter forholdet mellem de fire skitserede problemfelter. De er alle fire indbyrdes forbundne: Hvordan man begrunder matematikundervisningen på et givet niveau indvirker på, hvilke matematiske emner man mener, der er centrale, og hvilke former for læring, man ønsker at fremme; hvordan man opfatter matematik som videnskab indvirker på, hvordan man begrunder faget i en undervisningssammenhæng, hvilke emner man fremhæver som de centrale, og hvilken form for pædagogik man mener der skal praktiseres; osv.. Samtidig er der imidlertid en vis kausalitet mellem de begrundelsesmæssige, matematiske, og lærings-teoretiske spørgsmål på den ene side, og de pædagogiske på den anden side. Man kan efter interesse tage afsæt i hver af de tre førstnævnte problemfelter, for så at analysere konsekvenserne på de øvrige områder. Analyser af pædagogiske spørgsmål kan derimod ikke finde sted, uden at man har taget stilling til referencerammen ift. de øvrige problemfelter. For eksempel kan man ikke analysere, hvordan gruppearbejde bør praktiseres i matematikundervisningen, eller hvordan arbejde med matematiske modeller bedst integreres heri, uden at forholde sig til, hvad man ønsker at opnå med matematikindervisningen. Du—eller andre med lang erfaring indenfor undervisningssektoren—vil måske mene, at du i det daglige arbejde da ofte gør dig pædagogiske overvejelser uden reference til andre problemfelter. Der er det så vores påstand, at du implicit eller eksplicit *har* forholdt dig til mange af spørgsmålene af højere kausal orden, og at det betinger dine pædagogiske overvejelser!

I forhold til vores ønske om at fremme en mere hensigtsmæssig integration af arbejdet med matematiske modeller i gymnasieundervisningen, end den der i øjeblikket finder sted, tror vi derfor, at vi giver det mest langsigtede bidrag til en ændring af tingenes tilstand, ved at medvirke til at nuancere den reference-ramme, som pædagogiske analyser hviler på. Vi håber med andre ord, at vi kan skabe et solidt grundlag for, at både vi, og andre med interesse for sagen, efterfølgende på reflekteret vis kan deltage i diskussionen om, *hvordan* arbejdet med matematiske modeller i praksis bedst integreres i matematikundervisningen.

Det første vi i rapporten vil gøre i forsøget på at nuancere referencerammen, er grundigt at diskutere betydningen af de to begreber, som vi mener er essentielle ift. at karakterisere arbejdet med matematiske modeller, og som vi derfor også har ladet være omdrejningspunktet for resten af analysen; *problemløsning* og *modellering.*

I forhold til resten af rapporten betyder disse afgrænsninger, at vi vil analysere, hvilke *potentialer* der er ved at arbejde med problemløsning og modellering i undervisningen med udgangspunkt i spørgsmål af begrundelsesmæssig, matematisk og lærings-teoretisk natur. At vi ikke medtager det pædagogiske problemfelt betyder ikke, at vi afholder os fra at forholde os til de pædagogiske spørgsmål, der naturligt dukker op. Det, vi ikke gør, er at *analysere* sådanne spørgsmål.

Analysen har to dele, som vi vil referere til som hhv. matematikfaglig og kognitions-psykologisk. Med en *matematikfaglig analyse* mener vi en deskriptiv analyse af de til forskellige tider gældende *fagopfattelser* af matematik. Heri inkluderer vi såvel det omgivende samfunds som matematikersamfundets (herunder matematiklærernes) syn på matematik og matematikundervisning. I den matematikfaglige analyse beskæftiger vi os således primært med de begrundelsesmæssige og matematiske problemfelter.

Med en *kognitions-psykologisk analyse* menes en psykologisk tilgang til de *erkendelsesmæssige* (intellektuelle) dele af en lærings-proces. Det drejer sig om funktioner som tænkning, sprog, hukommelse og netop problemløsning, hvilket selvfølgelig er en væsentlig grund til, at vi vælger at analysere den kognitive del af en lærings-proces, og ikke den affektive, som vedrører de følelsesbetonede sider af—i dette tilfælde—læring. En anden grund til denne afgrænsning er, at de kognitive funktioner i langt højere grad end de affektive meningsfuldt kan analyseres uden at inddrage pædagogiske spørgsmål i analysen. For eksempel kan man godt—som vi vil gøre det—analysere, hvordan den menneskelige hjerne repræsenterer ny viden, uden nødvendigvis at inddrage under hvilke praktiske omstændigheder, denne nye viden opleves, hvorimod det er stærkt begrænsende for relevansen af analysen ikke at inddrage de praktiske omstændigheder, hvis fokus er på, hvordan det *opleves* at skulle optage ny viden.

1.2.2 Problemformulering

Som sammenfatning af ovenstående indkredsning af den analyse, vi vil lave, kan vi nu formulere følgende spørgsmål, som danner udgangspunkt for vores arbejde:

> *Hvordan kan vi konstruktivt karakterisere problemløsning og modellering, og hvilke potentialer kan vi på baggrund af hhv. matematikfaglige og kognitions-psykologiske analyser argumentere for, der er, ved at arbejde med problemløsning og modellering i gymnasiets matematikundervisning?*

Kapitel 2

Problemløsning og modellering i en undervisningssammenhæng

Da vi planlagde arbejdet med specialerapporten, havde vi ikke forestillet os, at en afklaring af begreberne problemløsning og modellering og de afledte begreber skulle fylde et helt kapitel. Snarere en side eller to under overskriften "lad os indledningsvist afklare nogle centrale begreber". At det ikke er nok, men at der er behov for en særdeles præcis begrebsafklaring, var vores eget indtryk, efterhånden som vi fik diskuteret, hvordan begreberne kunne afgrænses i forhold til hinanden og i forhold til andre begreber som fx. "opgave". At andre også kan have glæde af en begrebsafklaring, fik vi indtryk af, efterhånden som vi fik diskuteret problemløsning og modellering med forskellige kolleger fra gymnasieverdenen. Dette indtryk blev bestyrket, da vi fik lejlighed til at fremlægge og diskutere vores ideer og tanker med en gruppe hollandske undervisere under deres besøg i Danmark. På baggrund af disse erfaringer er det vores indtryk, at problemløsning og modellering selvfølgelig er begreber, man nikker genkendende til i matematiklærer-kredse, men at kun de færreste undervisere har gjort sig klart, i hvilken betydning de bruger disse begreber, og om det er den mest frugtbare betydning.

At uddybe meningen med den ovenstående problematisering gennem begrebsafklaring, er blevet dette kapitels ærinde. Når kapiteloverskriften hentyder til "en undervisningssammenhæng", er det ikke fordi vi her vil diskutere os frem til, hvordan begreberne kan eller skal indgå i en undervisningssammenhæng. Det er jo den analyse, specialerapporten som helhed forhåbentligt kan bidrage til. Nej, "undervisningssammenhæng" henviser til, at vi tager udgangspunkt i en undervisningssituation, og at vi holder os indenfor undervisningsområdet; at vi altså afgrænser begreberne i forhold til andre begreber fra undervisningsverdenen.

2.1 Hvad er "et problem"?

George Polya har i [Polya 62, p.117] præciseret, hvad han vil forstå ved et problem:

> "In general, a desire may or may not lead to a problem. If the desire brings to my mind immediately, without any difficulty, some obvious action that is likely to attain the desired object, there is no problem. If, however, no such action occurs to me, there is a problem. Thus, to have a problem means: *to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim.*"

En anden præcisering af nyere dato, kan ses i [Blum 91, p. 37]. Inspireret af denne vil vi ved et problem forstå: *En situation, der involverer en række åbne spørgsmål, der udfordrer en eller anden intellektuelt, som ikke umiddelbart er i besiddelse af direkte metoder/procedurer/algoritmer, der er tilstrækkelige til at besvare spørgsmålene.*[1]

Hverdagsbetydningen af et problem er i god overensstemmelse med disse definitioner; man står overfor et problem, når man er havnet i en situation, hvor man for at komme videre skal finde på et eller andet, der ikke lige springer i øjnene. I Polyas definition af problem nævnes matematik slet ikke. Faktisk henviser hans "desire" til ønsket om at få mad (det er ikke et problem hjemme i lejligheden, men det er et problem uden penge på lommen i en fremmed by i et fremmed land).

På trods af at et problem altså har nøjagtig samme betydning i matematik som i hverdagen, og at den nærmere definition af et problem ikke er noget nyt, er der tilsyneladende uklarhed om begrebets betydning i en matematikundervisnings-kontekst; man taler om problemløsning når man regner opgaver, man taler om opgaveregning når man løser et problem stillet af opgaven. Lad os derfor nedenstående uddybe betydningerne af opgave og problem.

2.1.1 Opgave, øvelse og problem

En opgave har en *objektiv* karakter forstået således, at hvor vidt der er tale om en opgave eller ej ikke er afhængig af, hvem der stiller den eller modtager

[1] Vi sondrer i øvrigt ikke mellem store og små problemer—det afgørende er udfordringen og et element af vanskelighed i løsningen. Polya har en lidt pudsig uddybning vedrørende dette: "A problem is a 'great problem' if it is very difficult, it is just a 'little problem' if it is just a little difficult. Yet some degree of difficulty belongs to the very notion of a problem: where there is no difficulty, there is no problem." [Polya 62, p.117].

den. Om udførelsen af opgaven giver anledning til et problem, kommer an på opgaveløseren. Et problem har nemlig en *subjektiv* karakter (hvad der er et problem for A behøver ikke at være det for B). Denne subjektive karakter ses også eksplicit i ovenstående definition på et problem ("...udfordrer en eller anden..."). Derfor medfører eksistensen af et problem også eksistensen af en eller anden person, det er et problem for.

En opgave kan for eksempel være "du får til opgave at slå græsset", eller "du får til opgave at finde rødderne i følgende andengradsligning". At skulle udføre sådanne handlinger, eller et sådant stykke arbejde, kan selvfølgelig sagtens give anledning til forskellige problemer. For eksempel kan græsslåmaskinen være gået i stykker, eller man kan have mistet sin formelsamling, eller man kan være på et for lavt uddannelsesniveau eller erfaringsniveau (for et 8-årigt barn giver begge opgaver sandsynligvis anledning til problemer). Man kan altså stille *alle* en opgave, men ikke vide sig sikker på, for hvem det er et problem.

For at kunne skelne klart mellem begreberne, har vi indført følgende konventioner for resten af rapporten: *Ved en opgave vil vi forstå en situation, hvor nogle bestemte handlinger ønskes gjort, eller hvor et bestemt mål ønskes opnået.* Vi taler om en *øvelse* i stedet for en opgave, hvis det med rimelighed kan antages, at opgaven ikke er eller vil føre til et problem for modtageren. I de tilfælde, hvor løsningen af opgaven giver anledning til et problem for modtageren, vil vi benytte termen *problem* i stedet for opgave. Opgave bliver derfor foreningsmængden af begreberne øvelse og problem, hvilket betyder, at vi vil benytte termen opgave, når modtagerens kompetencer ikke kan afgøres.

2.1.2 "Rene" og anvendelsesorienterede matematiske opgaver

Man kan umiddelbart skelne mellem to typer af matematiske opgaver; *rene* matematiske opgaver og *anvendelsesorienterede* matematiske opgaver. Idet vi lægger os tæt op af fremstillingen i [Blum 91, p.37], skelner vi således: *Hvis det definerende spørgsmål tilhører et udsnit af den virkelige verden, og tillader visse matematiske begreber, metoder og resultater at blive involveret, taler vi om en anvendelsesorienteret matematisk opgave. Hvis det definerende spørgsmål er helt indlejret i et matematisk univers, taler vi om en ren matematisk opgave.*

Med "det definerende spørgsmål" mener vi den del at opgaveformuleringen, der gør, at der i det hele taget er tale om en opgave, der sætter nogen i gang, og ikke blot en konstatering eller en kommentar. Derimod er det underordnet, om opgaveformuleringen har form af et spørgsmål, en kommando eller noget helt tredje. Med denne skelnen indført, kan vi—i første omgang—typificere opgaverne på side 11f. på en måde, der givetvis stemmer overens med, hvad enhver med interesse for sagen ville kunne, også uden at have gjort sig begrebernes indhold helt klart: Opgave 1, 4 og 5 er anvendelsesorienterede matematiske opgaver, mens opgave 2 og 3 er rene matematiske opgaver.

En nuancering er påkrævet

Ved at forestille sig de forskellige opgaver brugt i en undervisningssammenhæng bliver det imidlertid klart, at en typificering som denne nok ikke i sig selv er videre frugtbar, og i hvert tilfælde ikke tilstrækkeligt grundlag for et systematisk og velovervejet valg af opgavetyper. Dette skyldes, at der inden for hver af de to opgavetyper findes en variation hvad angår fordringer til eleverne, der er langt større end variationen typerne imellem.

Således vil opgave 2 være en *øvelse* for de fleste gymnasieelever, der har fulgt matematikundervisningen på obligatorisk niveau, idet der er tale om en standardopgave med en velgennemprøvet løsnings-algoritme, hvorimod opgave 3 for *alle* disse elever vil være et *problem*, som kun et fåtal af dem vil kunne løse, selv med ubegrænset tid stillet til rådighed. Hvilke strategier man kan sige, der generelt indgår i forsøget på at løse et problem som dette, vender vi tilbage til i afsnit 2.4.1. Foreløbig vil vi nøjes med at pointere, at målt på en "skala" over elevernes kvaler med besvarelsen ligger både opgave 1 og 4 efter vores vurdering *mellem* opgave 2 og 3. Dette er tænkt som en indikation på, at den introducerede skelnen mellem øvelser og problemer er langt vigtigere at være opmærksom på i en undervisningssammenhæng, end den let gennemførlige opsplitning i anvendelsesorienterede og rene matematikopgaver. Den bliver først rigtig interessant i en undervisningssammenhæng, hvis vi nuancerer begrebet *anvendelsesorientering*, så det også er muligt at skelne opgaver som nummer 1, 4 og 5 fra hinanden. For ligesom opgave 2 og 3 vil opleves meget forskelligt af de fleste gymnasieelever, vil disse tre opgaver også fordre meget forskellige elev-aktiviteter: Opgave 1 og 4 vil uden videre kunne anvendes indenfor rammerne af en sædvanlig 45-minutters lektion, mens opgave 5 vil kræve et længere forløb og inddragelse af information, der ikke sædvanligvis er tilgængelig i et almindeligt klasselokale, blot for at nævne én afgørende forskel.

Men hvordan kan vi klarere beskrive forskellen på, hvad forskellige anvendelsesorienterede opgaver fordrer af eleverne? Hvad er *egentlig* forskellen på opgave 1, 4 og 5 på side 11f.? For at kunne svare på spørgsmål som disse må vi forklare, hvad vi lægger i begrebet *modellering*, hvilket igen forudsætter, at vi har redegjort for vores forståelse af begrebet *model*. Herefter vil vi så—udrustet med en skarpere begrebsforståelse—i afsnit 2.5 vende tilbage til karakteristikken af de fem opgaver.

2.2 Hvad er "en model"?

Ordet "model" indgår i en række sammensatte ord, som er velkendte for alle voksne mennesker; modelfly, fotomodel, osv.. Selv små børn har en rimelig forestilling om, at deres legetøjsbiler er modeller af virkelige biltyper, og for togs vedkommende hedder legetøjsudgaven ligefrem et modeltog, en modeljernbane, osv.. Ligeså selvfølgelig ordet "model" således synes at indgå i almindelig sprogbrug, ligeså selvfølgeligt er det imidlertid, at brugen kun sjældent ledsages af en bevidst refleksion over, hvad der egentlig ligger heri. Hvad er egentlig forskellen på at sige "modelfly" og bare "fly", og er det det samme som forskellen mellem "fotomodel" og bare "foto"?

Ifølge Lademanns Fremmedordbog er en model: "Forbillede, mønster; gengivelse i formindsket målestok." At en model kan være et forbillede, eksemplificeres jævnligt gennem diskussionerne om fotomodeller og skønhedsidealet. Tilsvarende taler man om, at et barn bruger sine forældre som model, når de anvendes som forbillede for handlinger, væremåde, livssyn osv.. Model som formindsket og/eller forenklet repræsentation af virkeligheden anvendes fx. af arkitekter i deres fysiske modeller af deres ideer eller forslag. Når et udsnit af virkeligheden repræsenteres på en eller anden måde, involveres en model. Vi *definerer en model som triplen* (A, M, f), *hvor* A *er et* udsnit *af virkeligheden, og* f *er en afbildning, der oversætter elementer fra* A *til elementer i den valgte repræsentation* M.[2] Elementer i A tilhører den del af virkeligheden, der gøres til genstand for modellering (udsnittet). Elementerne i M afhænger naturligvis af, med hvilke midler repræsentationen foretages.

Det er altså ikke blot repræsentationen M der er modellen, men *triplen* (A, M, f). Fordelen ved at definere modeller på denne måde er først og fremmest, at vi får fremhævet at modellen er en *model af noget*, som Mogens Niss også konstaterer. Endvidere mener vi, at man på en relativ enkel måde får skelnet mellem virkelighed, afbildningen og selve repræsentationen—en opsplitning vi får glæde af i det efterfølgende. Eksempelvis forstår vi ved et modeltog ikke blot selve modeltoget, men også den virkelighed og den oversættelse der lå forud for selve modeltoget. Her er A altså den specifikke togtype, f bestemmer de egenskaber ved virkeligheden der skal repræsenteres, og M er repræsentationen af toget, som det herefter tager sig ud. Modeltoget er alle disse ting på en og samme gang.

[2] Vi har ladet os inspirere af den måde Mogens Niss har valgt at definere matematiske modeller på, i [Niss 89, pp. 28-29].

2.2.1 Afbildning af virkeligheden

Det er afbildningen f, der fastlægger hvilke egenskaber fra den udvalgte del af virkeligheden, der skal repræsenteres, ligesom f også fastlægger, hvordan de skal repræsenteres. Vi mener ikke det er fornuftigt at lægge begrænsninger på f. Derfor kan vi altså sagtens forestille os, at f slet ikke gør noget som helst; det valgte virkelighedsudsnit repræsenteres ved sig selv uden nogen form for oversættelse. At det ikke er helt ufornuftigt, understøttes af et eksempel, hvor det ikke er hensigtsmæssigt at skelne mellem model og virkelighed. Afdrag og rentetilskrivning på et obligationslån i en kreditforening er et eksempel, hvor den virkelige situation faktisk er en model—det specifikke udsnit af virkeligheden skabes mange år frem i tiden af modellen for annuitetsgæld.

I praksis repræsenterer modeller ofte virkeligheden på en anderledes måde end virkeligheden selv; f virker altså aktivt. Vi har valgt begrebet *abstraktion* til at betegne det forhold, at f virker aktivt. Abstraktion dækker over beslægtede begreber som; forenkling, tilpasning, bortskæring, negligering, osv. Afhængigt af det konkrete behov, der ligger til grund for modellen, kan abstraktionens omfang selvfølgelig variere. Landkort som modeller af virkeligheden er et godt eksempel på behovet for abstraktion. Landkort er modeller af virkelige geografiske forhold, der repræsenteres i to dimensioner og i mindre målestoksforhold. Der findes imidlertid mange forskellige slags kort, og disse adskiller sig fra hinanden ved de abstraktioner, der foretages ved f i de konkrete tilfælde. Planlægningen af en køretur mellem to byer langt fra hinanden kræver fx. et kort, hvor hovedvejene mellem forskellige byer er aftegnet og kan identificeres med vejskiltene, og hvor byerne blot behøver at være indtegnet som små cirkler. Altså et kort med et højt abstraktionsniveau. I andre sammenhænge kræves kort med betydeligt lavere abstraktionsniveau; orienteringsløbere bruger fx. kort, der ikke blot har et stort målestoksforhold, men også angiver højdekurver o.lign. Andre korttyper beskriver måske underjordisk rørføring i et afgrænset område. Abstraktionsmulighederne er altså mangfoldige, og må afhænge af det konkrete formål med modellen. Pointen er, at der i alle ovennævnte tilfælde i vidt omfang er tale om *abstraktioner* i varierende omfang, og at dette er bevidst og fornuftigt, afhængigt af formålet med modellen.

Model og problem—en afgrænsning

Begrebet *problem* har en subjektiv dimension, idet definitionen af problem fordrer eksistensen af et subjekt, jvf. afsnit 2.1.1. I forhold hertil adskiller begrebet *model* sig ved ikke at fordre eksistensen af et subjekt, men derimod et andet objekt; en model er en model *af noget.* At en model ikke har en

subjektiv dimension kan forklares ved, at det ikke kan forholde sig således, at det der er en model for A ikke er det for B.

2.2.2 Matematiske modeller

Når elementerne i M består af matematiske objekter, relationer, strukturer osv., betegner vi modellen som en *matematisk model.* Matematik indgår i et vist omfang i konstruktionen af flere modeller, end de fleste umiddelbart gør sig klart. I eksemplerne med legetøjsudgaver af toge, biler og fly er der fx. oftest beregnet vinkler, længder osv., for bevidst at bevare visse dele (typisk er legetøjsmodeller proportionstro, dvs. har vinklerne bevaret) og ændre størrelse på andre (legetøjsmodeller er sjældent i naturlig størrelse, dvs. længdemålene er ændret). Og i eksemplet med forskellige typer kort er inddragelsen af matematik eksplicit, da informationen om hvilket målestoksforhold, der er anvendt, er så vigtig, at brøkdelen (fx. 1 : 100000) angives direkte. Men i disse tilfælde er matematikkens begreber og metoder i spil i afbildningen f, og ikke i selve repræsentationen. Styrken ved den modeldefinition, vi har valgt, understreges af, at den netop muliggør denne sondren.

Anvendelse af matematiske modeller

Mon ikke mange har en forestilling om, at en matematisk model er en slags værktøj, måske endda materialiseret i form af en computermodel, der kan bringes i anvendelse for at løse en bestemt konkret problemstilling. En sådan bevidst anvendelse af matematiske modeller til belysning af et problem, kalder Morten Blomhøj for *punkt-anvendelser* "for at understrege deres afgrænsning i tid og rum" [Blomhøj 92, pp. 29–31].

Måske er det mindre oplagt, at fx. regning med pengebeløb er et eksempel på anvendelse af en matematisk model. Morten Blomhøj kalder denne type anvendelse for *flade-anvendelse* af matematiske modeller "for at understrege deres udbredelse over hele samfundet i både tid og rum" [Ibid.]. Som eksempel nævner han, at når vi bruger vores matematik til at finde ud af, om vi har penge nok til et franskbrød til $12,25$ kr. og en liter sødmælk til $9,30$ kr. hos bageren søndag morgen, så sker det ved hjælp af en matematisk model. Priserne er repræsenteret ved decimalbrøker, hvorefter de kan adderes til $21,55$ kr., som vi afrunder til $21,50$ kr., idet vi erkender modellens mangler. En sådan anvendelse af matematiske modeller foregår ubevidst. I resten af denne rapport vil vi kun beskæftige os med modeller, der er konstrueret bevidst med et bestemt formål for øje, dvs. *punkt-anvendelser* af matematiske modeller.

2.3 Modellering

Når vi skal beskæftige os med, hvordan begrebet *matematisk model* indgår eller kan indgå i en undervisningssammenhæng, er det formålstjenligt er se på den proces, konstruktionen af en sådan model udgør. I den righoldige litteratur, der findes om brugen af modeller i sammenhæng med matematikundervisning, fremstilles denne proces flere steder opdelt i en række faser af hensyn til overskueligheden. Selv om ordvalget selvfølgelig er forskelligt i disse fremstillinger, indeholder alle dem, vi er stødt på, essentielt de samme aktiviteter at gennemføre. Da vi har fundet en sådan opsplitning i faser uhyre nyttig, både i forbindelse med vores praksis som matematiklærere og som analytisk værktøj i forbindelse med udarbejdelsen af denne rapport, vil vi nu fremstille, hvad vi mener er en frugtbar måde at anskue konstruktionen af en matematisk model på. Fremstillingen er inspireret af præsentationen i [Blomhøj 92], [Niss 89] og [Skovsmose 90b].

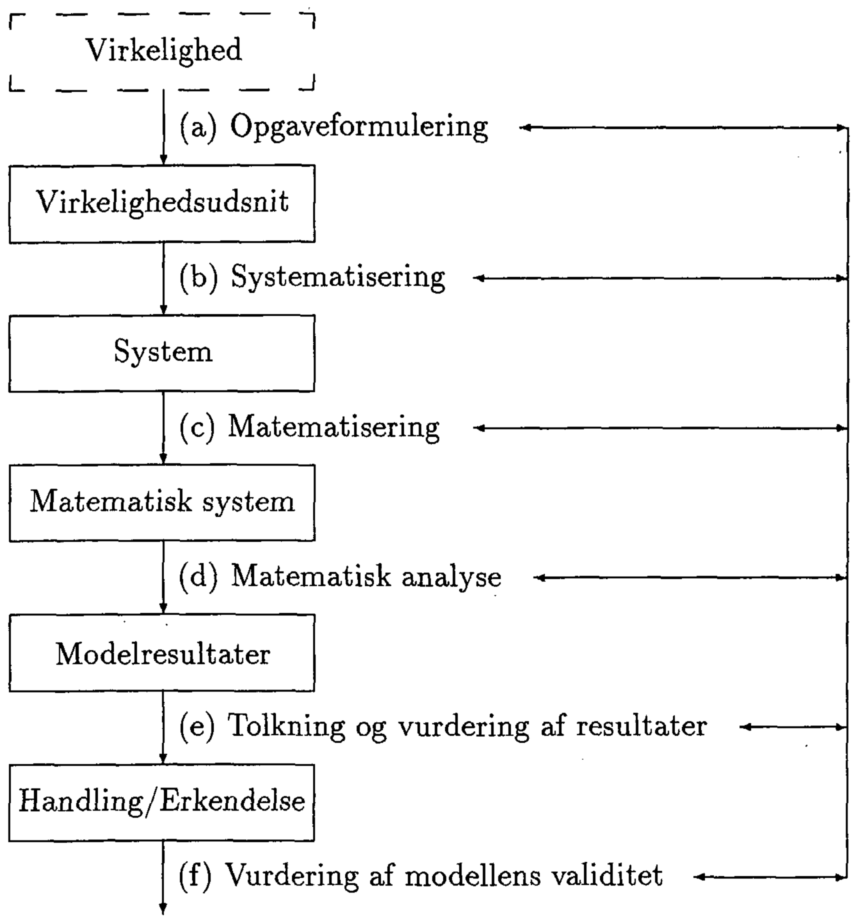
2.3.1 Modelleringsprocessen

Processen forbundet med at konstruere en matematisk model af et område af virkeligheden, udgøres i kort form af følgende aktiviteter: (a) Identificering af de egenskaber af virkeligheden, der skal modelleres; (b) udvælgelse af objekter, relationer osv. der er relevant herfor, og idealisering af disse til former, der er egnede til matematisk repræsentation; (c) oversættelse af disse objekter og relationer fra deres virkelige fremtrædelsesform til matematik; (d) brug af matematiske metoder til opnåelse af matematiske resultater og konklusioner; (e) tolkning af disse som resultater og konklusioner vedrørende det initierende område af virkeligheden; (f) vurdering af modellens validitet ved sammenholdelse med virkeligheden (dvs. med observerede eller forudsagte data), eller med videnskabelige teorier.

I overskriftsform er denne proces illustreret i figur 2.1. Udover at gengive ovenstående aktiviteter i en forhåbentlig mere overbliksskabende form, har vi her også forsøgt at "standse op" efter hver aktivitet, og vurdere hvilket niveau i modelkonstruktionen, vi befinder os på. Da sammenhængen mellem aktivitet og niveau ikke er tilstrækkeligt selvforklarende i summarisk form, vil vi kommentere denne sammenhæng, samt komme med uddybende bemærkninger til ovenstående kortfattede beskrivelse af aktiviteterne.

ad Opgaveformulering: Ud fra modelbyggerens interesser og teoretiske forhåndsviden forstås og formuleres den opgave, som modellen konstrueres med henblik på at udføre. Herved fokuseres uundgåeligt på et

Figur 2.1 Den matematiske modelleringsproces



subjektivt valgt *virkelighedsudsnit A*, som herefter tages som udgangspunkt for resten af modelkonstruktionen.

ad Systematisering: For at muliggøre en matematisk beskrivelse af det valgte virkelighedsudsnit, bliver den vilkårlige kompleksitet af selv et sådant udsnit beskåret, enten bevidst ud fra antagelser om, hvad der er mindre betydningsfuldt for den formulerede opgaves udførelse, eller ubevidst fordi modelbyggeren ikke er klar over betydningen af et eller andet. Modelbyggerens viden om det valgte virkelighedsudsnit får derfor stor betydning for, hvordan systematiseringen finder sted, og en ændring i denne viden vil således forventeligt virke tilbage på systematiseringen.

Den idealisering, der ligger heri, er en del af afbildningen f fra virkelighedsudsnittet over i et matematisk univers, hvorfor modellen og virkelighedsudsnittet allerede er to adskilte størrelser før den matematiske formalisme kommer ind i billedet. Det er for at pointere dette, at vi i figur 2.1 vælger at "stoppe op" ved det *system*, der efterfølgende repræsenteres matematisk.

ad Matematisering: Afbildningen f videreføres, idet systemets objekter og relationer nu forsøges oversat til matematik. De herved fremkomne matematiske objekter og relationer bør—for at være en fornuftig repræsentation af systemet—være ledsaget af antagelser om og egenskaber for disse. Produktet af disse anstrengelser er et *matematisk system.*

De valg, der uundgåeligt må træffes som en del af oversættelsen, er begrænset af modelbyggerens matematiske kompetence. Som følge heraf, eller som følge af en utilstrækkelig systematisering, vil matematiske vanskeligheder i beskrivelsen ofte føre til yderligere idealiseringer, der virker tilbage på systembeskrivelsen. Der er altså heller ikke her et entydigt forhold mellem de to niveauer "system" og "matematisk system".

ad Matematisk analyse: Der kan nævnes i hvert fald to grunde til, at man som modelbygger ofte vælger matematik som "modelsprog". For det første tilbyder matematik som sprog en klarhed i fremstillingen, som ofte er tillokkende. Denne fordel opnås alene ved at *opstille* det matematiske system. For det andet kan man belyse den oprindelige opgave ved at *analysere* dens matematiske fremtrædelsesform; det matematiske system. En sådan analyse kan være baseret på algebra, infinitisemalregning, computersimulering osv., men endemålet vil i alle tilfælde være en række *modelresultater.*

ad Tolkning og vurdering af resultater: Disse modelresultater skal nu fortolkes for at se, om de kan kvalificere reaktionen på den oprindelige opgave, enten i form af *handling* eller øget *erkendelse.* Denne fortolkning har to aspekter:

En *intern* fortolkning, der vurderer om det er rimeligt at konkludere noget som helst på basis af modelresultaterne, fx. ved at undersøge, hvor følsomme de er overfor små ændringer i de indgående parametre.

En *ekstern* fortolkning, der "oversætter tilbage" fra modelresultater til udsagn om virkelighedsudsnittet, og vurderer resultaterne på denne baggrund: Giver de mening i den virkelige verden? Er de realistiske? etc.

ad Vurdering af modellens validitet: En modelleringsproces kan gennemføres med forskellige formål for øje. Det kan være en måde at løse et foreliggende *problem* på. Eller det kan være et middel til at klare en *øvelse* lettere eller hurtigere, end hvis andre midler tages i brug; processen behøver altså ikke nødvendigvis at stamme fra et virkeligt problem, blot en virkelig situation. I begge tilfælde vil det være fornuftigt at sammenholde formålet med det gennemførte arbejde, for på denne måde at evaluere modelbygningen *i sig selv*: Gjorde jeg det fornuftigt? Kan jeg på nogen måde forbedre modellen? Hvad er modellens gyldighedsområde; under hvilke omstændigheder er den brugbar, og under hvilke omstændigheder er den ikke? Er matematisk modelbygning overhovedet en fornuftig måde at arbejde med den formulerede opgave på?

At stille og forsøge at besvare spørgsmål som disse kræver—udover den førnævnte matematiske kompetence og viden om det valgte virkelighedsudsnit—viden om processen forbundet med at bygge en matematisk model som den vi forsøger at formidle her. Ofte vil det være nødvendigt at bygge en ny eller modificeret model, og således gå skridt (a)–(f) igennem igen.

Vi vil reservere begrebet *modellering* til udelukkende at henvise til en proces, hvor alle faserne (a)–(f) gennemgås med henblik på at konstruere en matematisk model. Ikke nødvendigvis sekventielt fra start til slut; som antydet vil det ofte være fornuftigt at gå "baglæns" og gentage nogle af faserne, eller at gå igennem hele processen flere gange, hvilket pilene til højre i figur 2.1 er tænkt som en indikation af. Og ikke nødvendigvis på en bevidst og kontrolleret måde; som med så mange andre ting vil man sikkert gennemløbe de enkelte faser mere og mere instinktivt, jo bedre man er til at modellere.

Opsplitningen i faser har et deskriptivt udgangspunkt: Når matematik anvendes ifm. en ikke-matematisk virkelighed, er der *uundgåeligt* tale om implicit eller eksplicit gennemløb af en modelleringsproces, der har en fælles struktur, som vi altså opdeler i faserne (a)–(f).

Fremstillingen her skal med andre ord ikke læses som en kogebogsopskrift, men som et bud på en abstrakt opdeling af de processer, der mere eller mindre bevidst er i spil ved konstruktionen af en matematisk model. Men for at vi vil kalde en aktivitet *modellering*, skal man på den ene eller anden måde arbejde med alle de nævnte aspekter.

2.4 Problemløsning

Nu er det tid til at vende tilbage til den skelnen mellem øvelser og problemer, som vi introducerede i afsnit 2.1.1. Vi vil ikke beskrive metoden til løsning af øvelser, idet disse er karakteriseret ved, at det ikke er nødvendigt at anlægge metodiske betragtninger i forhold til løsningen; det ligger implicit i definitionen af øvelse, at løsningsmetoden er indlejret i opgaveformuleringen. I stedet vil vi ofre "krudtet" på løsning af *problemer*, da denne aktivitet—som "komplementærmængden" til løsning af øvelser—er karakteriseret ved nødvendigheden af bevidste eller ubevidste metodiske overvejelser, igen jvf. beskrivelsen i afsnit 2.1.1. Når vi i det følgende bevidst snakker om "problemløsning", og ikke det bredere begreb "opgaveløsning", er det derfor ikke fordi vi forudsætter en bestemt type opgaver, som vi på forhånd ved vil opleves som problemer af modtagerne. På grund af det subjektive ved begrebet "problem" ville det nemlig kræve, at man havde bestemte opgaver og en velkendt modtagergruppe i tankerne, hvilket er en afgrænsning, der helt ville ødelægge den tilsigtede eksemplaritet i vores analyse. Derfor er tanken snarere, at hvis du som læser har en konkret "kombination" af opgave og modtagergruppe i tankerne, som du vurderer vil gøre opgaven til en øvelse, så spring frejdigt videre i din forestillingsrække, indtil du vurderer, at "kombinationen" giver anledning til et problem for modtagerne. Først da er metodiske overvejelser som de nedenstående relevante at bruge tid på.

2.4.1 Heuristik og matematisk problemløsning

Problemløsning betegner simpelthen den proces, hvorigennem man forsøger at løse et problem. Problemet kan, som vi har beskrevet, være rent matematisk eller anvendelsesorienteret. Vi vil—som lovet på side 26—starte med at forsøge kort at beskrive problemløsning med udgangspunkt i et rent matematisk problem.

Det er næsten umuligt at komme uden om heuristikken i denne forbindelse. Alan Schoenfeld skriver i [Schoenfeld 85, p. 23]: "Once nearly forgotten, heuristics have now become nearly synonymous with mathematical problem solving". I den moderne forstand er det især Polyas navn og værker ([Polya 57] og [Polya 62]), der forbindes med heuristikken.

Polyas væsentligste bidrag var, at han gjorde opmærksom på fire faser, som kunne *beskrive* matematisk problemløsning som proces: a) forstå problemet; b) lav en plan; c) før planen ud i livet; d) se tilbage og vurder processen. Den berømmelse og anerkendelse, som denne karakteristik har opnået, skyldes i det væsentlige to ting. For det første gjorde beskrivelsen opmærksom på, at problemløsning rummede noget andet og mere end det at følge en alle-

rede udarbejdet plan. For det andet kunne de fleste matematikere genkende deres egen problemløsningsmetode i Polyas beskrivelse. At en sådan generel beskrivelse var mulig, kom bag på de fleste.

2.4.2 Modellering og anvendelsesorienteret problemløsning

Lad os nu igen vende os mod den type af problemer, som vi—ved at kigge på "det definerende spørgsmål"—kan karakterisere som anvendelsesorienterede, jvf. omtalen i afsnit 2.1.2. I de efterfølgende bemærkninger argumenterede vi for, at der er behov for at nuancere denne karakteristik, for at den bliver nyttig som baggrund for udvælgelse af opgaver i en undervisningssammenhæng. Da vi dengang endnu ikke havde diskuteret, hvad det indebærer at anvende matematik på problemstillinger, der i udgangspunktet ikke er matematiske, kunne vi imidlertid ikke gennemføre en sådan nuancering. Det kan vi nu.

I afsnit 2.3.1 gennemgik vi den proces, man skal igennem, for på fornuftig og reflekteret vis at anvende en matematisk model til at løse et problem uden for matematikkens verden. Ved at opdele denne proces i seks faser, jævnfør figur 2.1, side 31, har vi fået "foræret" en model at nuancere karakteristikken af anvendelsesorienterede problemer efter: Vi kan karakterisere hvert enkelt problem ved, hvilke af faserne i modelleringsprocessen, det overlades til problemløseren (eleven) at gennemføre, og hvilke der allerede er gennemført af problemstilleren (læreren/lærebogsforfatteren/eksamensopgave-udvalget).

At en sådan analyse er mulig, skyldes at man kan overbevise sig om, at *nogen* nødvendigvis bevidst eller ubevidst skal gennemføre i hvert fald faserne (a)-(e) i modelleringsprocessen, hvis et anvendelsesorienteret problem skal løses med matematikkens hjælp: Nogen skal nødvendigvis foretage de valg, der ligger i *opgaveformuleringen* og *systematiseringen*; nogen skal *matematisere* det fremkomne system, da vi omhyggeligt har afgrænset os fra de rene matematiske problemer, hvor denne del af processen er sammenfaldende med systematiseringen; hvis formålet med modelleringen ikke alene er at udnytte matematikkens klare sproglige udtryksform, jvf. omtalen side 32, skal nogen forsøge at opnå nogle modelresultater ved at gennemføre en *matematisk analyse*; og da disse matematiske resultater—igen qua vores afgrænsning—ikke i sig selv er et svar på det definerende spørgsmål, skal nogen afgøre, om det er muligt at opnå ved at *tolke og vurdere disse resultater.*

Som det også fremgår af figur 2.1, er man kommet frem til *én mulig* løsning på det oprindelige problem (i form af handling og/eller erkendelse) ved at gennemføre disse processer. Snævert betragtet er fase (f); *vurdering af modellens validitet,* derfor ikke nødvendig, for at man kan sige, at problem-

løsningen er gennemført. Hvorvidt denne mere introspektive—og efter vores mening helt essentielle—del af modelleringsprocessen betragtes som en naturlig del af problemløsningen, er derfor et spørgsmål om, hvilken "opdragelse" af eleverne, man som underviser eller politiker ønsker problemløsningen skal bidrage til. Med andre ord; hvad er det *overordnede* formål med at inddrage anvendelsesorienterede matematiske problemer i matematikundervisningen? Det spørgsmål vender vi tilbage til i de efterfølgende kapitler.

2.5 Eksempler på anvendelse af begrebsapparatet

Efter denne nuancering af, hvad betegnelsen "en anvendelsesorienteret matematisk opgave" spænder over, er vi nu i stand til at videreføre den konkrete anvendelse af det opstillede begrebsapparat, som vi påbegyndte i afsnit 2.1.2. Vi vil igen vende tilbage til opgaverne på side 11f., og forsøge at karakterisere disse opgaver ud fra to retningslinjer: Dels hvor krævende en eventuel anvendelsesorientering er for eleven, dels om der for en typisk elev på gymnasiets matematiske linje antageligt vil være tale om en øvelse, eller om opgaven har karakter af et problem, med de metodemæssige overvejelser, det nødvendiggør.

ad Opgave 1: Denne opgave stammer fra den danske studentereksamen i matematik, sommeren 1977. Her er oplagt tale om en anvendelsesorienteret matematisk opgave. Løsningen af en sådan opgave vil selvfølgelig undervejs i løsningsprocessen give anledning til en rent matematisk opgave, hvis kompleksitet i sig selv kan gøre, at opgaven samlet set har karakter af et problem for en givet modtagergruppe. Hvis vi igen betragter faserne, der indgår i modelleringsprocessen som beskrevet på side 30ff., vil et sådant rent matematisk problem kunne opstå i fase (d); den matematiske analyse.

Med en gennemsnitlig gymnasieelev, der netop har fulgt den matematiske linjes obligatoriske niveau i matematik, som modtagergruppe, vil denne opgave efter vores vurdering opleves sådan[3], og *ikke*—som man umiddelbart kunne være fristet til at tro—som et anvendelsesorienteret problem med fokus på forbindelsen mellem matematik og

[3]Hvis det definerende spørgsmål havde gået på blodsukker-koncentrationens maksimum, ville hovedparten af disse elever sikkert opleve opgaven som en øvelse i at differentiere eksponentialfunktioner. Det problematiske for eleverne ligger i, at der spørges til væksthastighedens maksimum, hvilket ikke i gymnasiesammenhæng er en rutineunderssøgelse.

virkelighed. Det skyldes, at selv om det fremgår af opgaveteksten, at *nogen* har modelleret for at komme frem til den matematiske opgave, så *er* det underliggende anvendelsesorienterede matematiske problem allerede delvist modelleret: Sammenholdes opgaven med modelleringsprocessen som beskrevet i figur 2.1, kan det ses, at de indledende modelleringsfaser (a), (b) og (c) allerede er udført. Opgaven tager således udgangspunkt i en allerede systematiseret situation, der er velegnet til matematisering. Modtageren af opgaven får præsenteret det *matematiske system*, og bliver bedt om at udføre en matematisk analyse (pkt. (d)) og give *modelresultatet*. Der lægges heller ikke op til at afrunde modelleringen; faserne (e) og (f) skal ikke gøres til genstand for overvejelse eller analyse.

ad Opgave 2: Dette er en rent matematisk opgave, og vil for en gennemsnits gymnasieelev ved afslutningen af gymnasiet være en *øvelse*; det definerende spørgsmål har ingen forbindelse med dele af en ikke-matematisk virkelighed, og løsningsmetoden indgår som en del af det obligatoriske pensum.

ad Opgave 3: Her er ligeledes tale om en rent matematisk opgave, men den vil i modsætning til opgave 2 for de fleste på gymnasialt niveau være et *problem*; der er ikke metoder, algoritmer mv., der umiddelbart kan bringes i anvendelse til at løse opgaven.

ad Opgave 4: Her er igen oplagt tale om en anvendelsesorienteret matematisk opgave. I modsætning til opgave 1 har den et udpræget "ikke-autentisk" præg; der gøres ikke noget seriøst forsøg på at foregive, at situationen er en eksakt gengivelse af den overvejelse, man gør sig som profit-søgende teaterdirektør.

Opgaven inddrager i forhold til opgave 1 flere faser i modelleringsprocessen, og er således hvad anvendelsesorienteringen angår mere krævende. Idet vi igen sammenholder opgaven med figur 2.1, ses det at opgavemodtageren får præsenteret *systemet* og bliver bedt om at foretage *matematiseringen (fase (c))*, den *matematiske analyse (fase (d))* og give *modelresultatet*. Som for opgave 1 lægges der ikke direkte op til at komme ind på de resterende faser (e) og (f). På gymnasialt niveau vil opgavens løsning efter vores erfaring føre til et problem, fortrinsvis vedrørende fase (c).

ad Opgave 5: Igen en anvendelsesorienteret matematisk opgave. Løsningen kræver i modsætning til opgave 1 og opgave 4, at opgavemodtageren gennemfører en fuld modelleringsproces, idet opgaveformuleringen er

det eneste der er givet. Virkelighedsudsnittet, dvs. den del af skattesystemet, der inddrages, skal udvælges i overenstemmelse med den givne opgaveformulering. Systematiseringen indebærer en række valgsituationer og overvejelser omkring antagelser; der må skeles til, hvad det er muligt at repræsentere, hvad der skal repræsenteres, og det spiller igen ind, hvordan opgaveformuleringen tolkes, ligesom det skal afgøres, hvordan systemet skal beskrives. På grund af kompleksiteten af skattelovgivningen som system, vil denne del af modelleringsprocessen givetvis opleves som vanskelig for de fleste gymnasieelever.

Hele systemet beskrevet i verbale termer skal nu oversættes til matematisk sprogbrug og symbolisme (matematiseres), og det skal afgøres, hvordan de systematiserede sammenhænge—nu beskrevet ved matematiske symboler—er relateret til hinanden matematisk. Det matematiske system, der fremkommer, gøres så til genstand for matematisk analyse; kan man reducere de mange forskellige skatteberegninger til et simplere udtryk?. De modelresultater, der fremkommer af den matematiske analyse, fx. en regneforskrift for skatten som funktion af indkomsten, skal fortolkes og vurderes (er der nogle indtægter, der ifølge modellen urealistisk giver en negativ skat?), og danne basis for en erkendelse af sammenhængen mellem indkomst og skat. Afslutningsvis skal hele modelleringsprocessen gøres til genstand for selvanalyse, idet modellens validitet vurderes. Er det fx. smart at bruge en generel regneforskrift for at forenkle beregningerne, eller er folks situation for forskellig til det?

Denne opgave, der er temmelig atypisk i gymnasiesammenhæng, er den eneste af de fem, hvis løsning for en gennemsnitlig gymnasieelev vil indebære såvel problemløsning som modellering. For en anden målgruppe, fx. skatterevisorer, er opgaven måske en triviel øvelse. Imidlertid kommer selv skatterevisorer ikke uden om modelleringsprocessen i besvarelsen af opgaven—den gennemføres blot ikke som et led i problemløsning. Skatterevisorernes proces kan altså karakteriseres som modellering ifm. rationalisering af en rutinepræget opgave, medens gymnasieelevernes proces kan karakteriseres som modellering for at løse et problem.

2.6 Sammenfatning

2.6.1 Begrebsforståelsen

Vi har i dette kapitel nuanceret forståelsen af de begreber, vi hævder er centrale ifm. tilrettelæggelsen af gymnasial matematikundervisning.

Vi skelner mellem problemer og øvelser som følger: Ved *et problem* vil vi forstå en situation, der involverer en række åbne spørgsmål, der udfordrer en eller anden intellektuelt, som ikke umiddelbart er i besiddelse af direkte metoder/procedurer/algoritmer, der er tilstrækkelige til at besvare spørgsmålene, jvf. omtalen side 24. Alle opgaver, hvor en sådan løsningsmetode kendes, betegner vi *øvelser*. Da der i hvert enkelt tilfælde kun er disse to muligheder, bliver *opgave* således fællesbetegnelsen for problemer og øvelser, og bruges hvis det ikke kan afgøres, om der er tale om et problem eller en øvelse.

Desuden skelner vi mellem anvendelsesorienterede og rene matematiske opgaver: Hvis det definerende spørgsmål tilhører et udsnit af den virkelige verden, og tillader visse matematiske begreber, metoder og resultater at blive involveret, taler vi om *en anvendelsesorienteret matematisk opgave*. Hvis det definerende spørgsmål er helt indlejret i et matematisk univers, taler vi om en ren matematisk opgave, jvf. omtalen side 25.

Vi definerer *en model* som triplen (A, M, f), hvor A er et *udsnit* af virkeligheden, og f er en afbildning, der oversætter elementer fra A til elementer i den valgte repræsentation M, jvf. omtalen side 27. Når elementerne i M består af matematiske objekter, relationer, strukturer osv., betegner vi modellen som en *matematisk model*. Processen forbundet med at konstruere en matematisk model af et område af virkeligheden udgøres i kort form som minimum af følgende aktiviteter: (a) Opgaveformulering; (b) systematisering; (c) matematisering; (d) matematisk analyse; (e) tolkning og vurdering af resultater; (f) vurdering af modellens validitet. Vi vil reservere begrebet *modellering* til udelukkende at henvise til en proces, hvor alle faserne (a)–(f) gennemgås med henblik på at konstruere en matematisk model, jvf. omtalen side 30ff..

2.6.2 begrebsanvendelsen

Vi mener selv, at afklaringen af begreberne har været yderst frugtbar. At karakterisere de fem opgaver som i forrige afsnit var et eksempel på anvendelse af vores begrebsafklaring; det er nu muligt at karakterisere vilkårlige opgaver på en systematisk måde. For eksempel så vi, at flere af opgaverne lægger op til at inddrage matematiske modeller som en del af løsningen, men at denne inddragelse i flere tilfælde kun involvererede opgaveløseren i enkelte af modelleringsfaserne. Der er derfor i disse tilfælde ikke tale om oplæg til modellering, men om anvendelsesorienterede opgaver i en væsentligt mindre krævende udgave. Denne typificering bør derfor nuanceres betydeligt for at muliggøre en frugtbar opgave-karakteristik. Betegnelsen "anvendelsesorienterede matematiske opgaver" kan—efter vores mening—således med fordel opfattes som dækkende over et *spektrum* af opgaver, der spænder lige fra øvelser i at gennemføre en enkelt af faserne i modelleringsprocessen, til problemer hvis løsning sender opgavemodtageren ud i egentlig modellering.

Pointen er i første omgang ikke at afgøre, hvilke opgavetyper der er gode, og hvilke der er dårlige, men at en nuanceret karakteristik af forskellige opgaver—for eksempel efter de retningslinjer, vi her har foreslået—kan benyttes som analytisk værktøj til at udskille de kompetencer, de forskellige opgaver bidrager til at eleverne udvikler.

En sådan analyse vil selvfølgelig være specielt værdifuld i de tilfælde, hvor man kan fristes til at tro, at en opgave bidrager med noget andet, end den faktisk gør. Vi har tidligere brugt opgave 1 fra side 11 som eksempel på en opgave, hvor det meget vel kunne tænkes at være tilfældet. I forhold til hvilke væsentlige kompetencer, der bidrages til at udvikle, vil denne opgave således ikke blive anderledes, hvis det definerende spørgsmål blev ændret til: "Bestem den x-værdi hvor funktionsværdien hurtigst forøges", jvf. formuleringen på side 11. Det analysen viser er den centrale hurdle; den matematiske analyse, ville nemlig være uændret. Men "signalværdien" ville unægtelig være en anden. Således skriver Mogens Niss om opgaven i sin nuværende form:

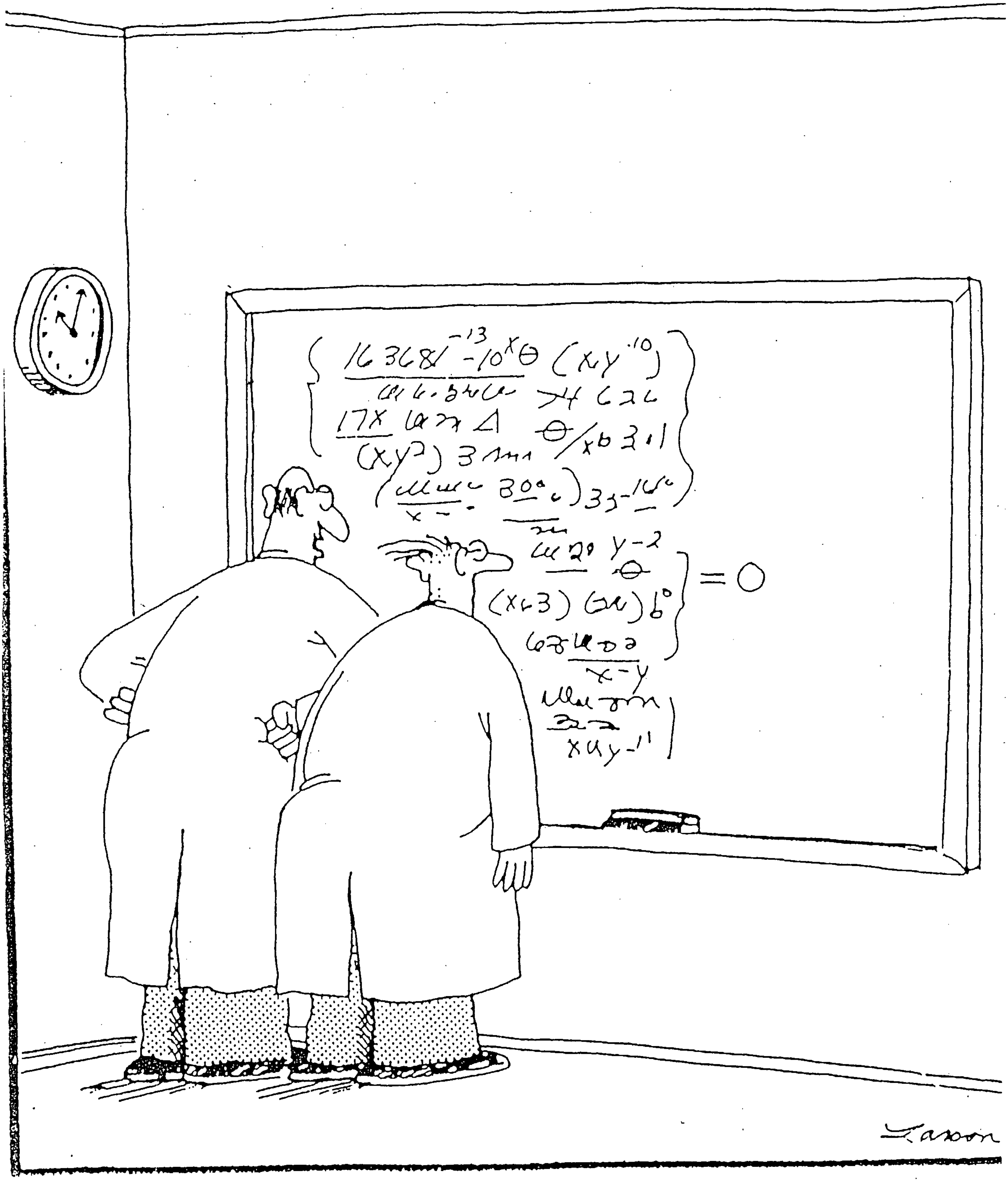
> "The purpose of the task seems to be to present an extra-mathematical situation, *similar* to an authentic one, which in disguise leads to the activation of recently developed mathematical tools. [...] So students are expected to do two things: (1) remove the disguise, and (2) perform a rather standard mathematical exercise" [Niss 91a, p. 353].

Der er umiddelbart ikke noget galt i at stille opgaver, hvor anvendelsesorienteringens berettigelse er at *demonstrere*, at der faktisk finder anvendelse af en given matematisk teknik sted, uden at forsøge at opøve selvstændig kompetence i at praktisere denne anvendelse. Der er heller ikke noget umiddelbart forkert ved at stille opgaver, der oplagt ikke er autentiske matematikanvendelser, men som qua deres anvendelsesorientering forsøger at opøve dele af en egentlig modelleringskompetence. Tilsvarende med diskussionen om øvelser versus problemer: Begge opgavetyper kan vise sig at have deres berettigelse i en given undervisningssammenhæng.

Men for begge diskussioner gælder der, at hvis elever, lærere, eksamensopgave-udvalg, eller andre med "aktier" i sagen tror, at man stiller en type opgave, og det ved et nærmere eftersyn viser sig, at man gør noget andet, så er der oplagt er problem, hvilket Mogens Niss' bemærkning også er en slet skjult antydning af. Der er derfor behov for på alle niveauer at analysere, om der er en fornuftig sammenhæng mellem mål og midler ift. opgavevalg til en given matematikundervisning, både hvad angår faktiske og ønskværdige mål. Det er en sådan analyse, vi vil forsøge at bidrage til i de resterende kapitler, med den danske gymnasieskoles matematiske linje som niveau-mæssigt udgangspunkt.

Del II

Opfattelser af matematik og matematikundervisning



"No doubt about it, Ellington—we've mathematically expressed the purpose of the universe. Gad, how I love the thrill of scientific discovery!"

Kapitel 3

Indledning til del II

Som et resultat af begrebsapparatet vi behandlede i kapitel 2, er det nu muligt at kommunikere præcist om problemløsning og modellering—en kompetence, der er helt afgørende for, om der overhovedet bliver problemløst og modelleret i gymnasiets matematikundervisning! Det er også muligt med kapitel 2 i hånden at karakterisere givne opgavetyper i forhold til en konkret betydning af begreberne. Vi mener, at disse to pointer selvstændigt har noget at bidrage med i afhjælpningen af tilrettelæggelsesproblemet med problemløsning og modellering i gymnasieundervisningen.

Derimod er det ikke muligt at vurdere relevansen af overhovedet at inddrage problemløsning og modellering i undervisningen—udover selvfølgelig at det rent faktisk forlanges i undervisningsbekendtgørelsen.

I nærværende del har vi valgt at analysere, hvilke potentialer problemløsning og modellering som grundlæggende tilrettelæggelsesform kan siges at have på baggrund af en *matematikfaglig* analyse, jvf. problemformuleringen side 22.

Som vi beskrev i kapitel 1, mener vi med en "matematikfaglig analyse" en deskriptiv analyse af den til forskellige tider gældende *fagopfattelse* af matematik. Heri inkluderede vi såvel det omgivende samfunds som matematikersamfundets (herunder matematiklærernes) syn på matematik og matematikundervisning. Lad os for nemheds skyld kalde disse to tilgange for henholdsvis *den eksterne og den interne fagopfattelse.*

Denne analyse kommer konkret i stand ved, at vi vil karakterisere to forskellige undervisningstraditioner, og den bagvedliggende matematikfaglige forståelse. Udover den matematiske undervisningstradition, vi selv her og nu er en del af, har vi valgt den undervisningstradition, der populært betegnes "60'er-matematikken" eller "den ny matematik". Dermed kan den overordnede metode her i anden del kaldes "historisk komparativ". I forhold til at give analysen af problemløsning og modellerings potentialer størst mulig generalitet, kunne en afdækning af samtlige mulige fagopfattelser af matematik og matematikundervisning måske umiddelbart virke oplagt. Når vi ikke anlægger en sådan angrebsvinkel, skyldes det to forhold. Det første er spørgsmålet om klarhed: Fagopfattelser er hverken entydige eller diskrete størrelser, hvorfor der er en fare for at en altomfattende analyse "skyder med spredhagl" med tilhørende uspecifikke konklusioner, som vi også udtrykte i en lignende afgrænsning i kapitel 1. Det andet forhold er spørgsmålet om relevans. Her vil vi pege på tre forhold, som begrunder valget af 60'er-matematikken som sammenligningsgrundlag for nutidens matematiksyn.

At 60'er-matematikken er interessant skyldes for det første, at vi mener, at den interne fagopfattelse, der lå bag 60'er-matematikken, stadig er tilstede som en dominerende del af den nutidige matematikopfattelse: Hvis vi tidsmæssigt placerer 60'er-matematikken i perioden fra først i tresserne til sidst i halvfjerdserne, er hovedparten af den del af befolkningen, der nu er i alderen fra først i 30'erne til først i 50'erne, blevet undervist efter dens principper i folkeskole- og/eller gymnasie-matematikundervisningen. En stor del af de nuværende gymnasielærere tilhører denne aldersgruppe. Herudover er det vores indtryk, at så godt som alle danske universitetsstudier i matematik både før, under og efter 60'er-matematikken foregår efter dens principper, hvorfor så godt som alle nuværende gymnasielærere har arbejdet under disse principper på afsluttende trin af deres uddannelse, om ikke før. Vi mener derfor, det er helt forventeligt, hvis den aktuelle gymnasiepraksis i matematik er stærkt præget af 60'er-matematikkens principper, hvorfor et nærmere kendskab hertil vil være et væsentligt bidrag til en moderne forståelse.

For det andet mener vi, at datidens eksterne fagopfattelse af matematik stadig er til stede som en del af den nutidige: Samfundets opfattelse af matematikundervisning i tresserne tog et væsentligt afsæt i behovet for at kvalificere (dele af) befolkningen til at forstå, udnytte og videreudvikle teknologiske fremskridt til samfundets bedste. Denne socio-tekniske fagopfattelse er stadig fremherskende [Niss 96].

For det tredje synes 60'er-matematikken mere relevant end tidligere tiders gymnasiale matematikundervisning: Uddannelsessystemets samfundsmæssige rolle er, med sociologiske termer, at socialisere befolkningen med henblik på reproduktion og videreudvikling af samfundet. De samfundsmæssige fagopfattelser vil derfor skifte med de betingelser (af social, politisk, teknologisk, økonomisk og kulturel art), der for hvert uddannelsesniveau er med til at afstikke rammerne for den ønskede indsocialisering. Da betingelserne for det gymnasiale uddannelsesniveau som det vil fremgå af den efterfølgende gennemgang har ændret sig markant gennem hele dette århundrede, er faren for at "sammenligne pærer og bananer" derfor mindre, hvis vi som sammenligningsgrundlag til den nutidige praksis vælger den seneste større reform;

60'er-matematikken. Tiden før reformen vil derfor blive omtalt med henblik på at sætte denne reform i en passende historisk ramme.

3.1 Den eksterne fagopfattelse

At den samfundsmæssige tilgang er relevant for vurderingen af modellerings potentiale, har vi allerede argumenteret for. Som vi—og mange andre—vælger at bruge begrebet, er modellering jo definitorisk forbundet med det omkringliggende samfund, jvf. omtalen i kapitel 2. Endvidere må vurderingen af både problemløsning og modellerings rolle i undervisningen afhænge af svaret på, *hvorfor* matematikundervisning er på programmet i den almendannende undervisning. Vi finder en diskussion heraf helt berettiget, ja efter vores mening uundværlig for en sammenhængende analyse af vores problemstilling. Det omgivende samfunds syn på matematik som undervisningsfag er derfor relevant at analysere, fordi afklaringen af problemløsning og modellerings rolle i undervisningen som et meget væsentligt element implicit eller eksplicit inkluderer stillingtagen til *matematikundervisningens begrundelse.*

3.1.1 Årsager, begrundelser og formål

I undervisningsbekendtgørelserne har samfundet eksplicit fastlagt *formålet* med matematikundervisningen, som vi så et eksempel på i kapitel 1. Dette officielt erklærede formål vil vi ikke alene tage til udtryk for den eksterne fagopfattelse af matematikundervisning: Der er ikke *nødvendigvis* overensstemmelse mellem de erklærede formål med, og den reelle årsag til matematikundervisningen. Den holdningsdannelse, der historisk set er årsag til ændringer af bekendtgørelserne, foregår i tidsrummet mellem vedtagelsen af de forskellige bekendtgørelser, og illustrerer at der parallelt med det eksplicitte syn udtrykt i formålsparagraffen er diskussioner og debatfora mv., hvis overordnede indhold derfor må medtænkes i synet. Det er dermed allerede antydet, at samfundets årsag til at udbyde fx. matematikundervisning er mere kompleks, end de relativt få linjer i bekendtgørelsen kan udtrykke. Fortolkningsmulighederne af bekendtgørelsens ord er derfor mangfoldige når de overordnede intentioner skal omsættes til konkret praksis—det er altså op til os som *lærere* at fortolke bekendtgørelsens passage om målsætningen. Det fordrer imidlertid, at vi har et rimeligt bredt—og personliggjort—grundlag og kendskab til samfundets udviklingstræk, at foretage denne fortolkning på baggrund af.[1]

[1] Se fx. [Christiansen 89] for en videre diskussion af lærerens rolle i det undervisningsmæssige problemfelt.

I [Niss 96] har Mogens Niss udarbejdet en deskriptiv/analytisk "survey" af udviklingen af formålene med matematikundervisningen det seneste århundrede, bla. i gymnasiet. Indledningsvist definerer han en række centrale begreber i relation til hans artikel. Blandt andet diskuterer han sammenhængen mellem *hvorfor* samfundet egentligt udbyder matematikundervisning, de *begrundelser* der fremlægges for matematikundervisning og *formålet* med undervisningen forudsat at den skal finde sted. Det er derfra vi er inspireret til vores forståelse og brug af termen "årsag" (reason) i resten af rapporten:

> "By a (real) reason for providing mathematics education to students within some segment of the educational system we understand a driving force, typically of a general nature, which in actual fact has motivated and given rise to the existence (i.e. the origination and the continuation) of mathematics teaching within that segment, as determined by the bodies which make the decisions (including non-decisions) in the system at issue." [Niss 96, p.12]

Som en god ramme for en karakteristik af det eksterne matematiksyn, konkluderer Mogens Niss, at der essentielt kun er tale om tre årsager til matematikundervisning, der dækker hele den internationale scene, både hvis man ser med nutidige og historiske briller på sagen [Niss 96, p. 13]:

- At bidrage til den tekniske og socio-økonomiske udvikling af samfundet som helhed (hvad vi vil kalde den økonomisk/tekniske årsag).
- At bidrage til samfundets politiske, ideologiske og kulturelle vedligeholdelse og udvikling (hvad vi vil kalde den politisk/kulturelle årsag).
- At udstyre individer med værktøjer/kvalifikationer/kompetencer til at hjælpe dem med at klare livets (ud)fordringer (hvad vi vil kalde den individ-orienterede årsag).

Denne kategorisering kan ses som en uddybning af en klassisk og mere overordnet tilgang. Ifølge denne er uddannelsessystemets rolle i samfundet dels at indføre eleverne i samfundets mangeartede facetter og tænkemåder, altså indførelsen i samfundets særegne kultur, og dels at udstyre dem med teknikker og metoder, som er nødvendige for at kunne klare sig og deltage i samfundets funktioner, fx. det at kunne skrive, læse og regne. De to roller kaldes hhv. *den socialiserende og kvalificerende rolle*[2]. Med denne forståelse er de politisk/kulturelle årsager udtryk for et ønske om socialisering, mens de økonomisk/tekniske og individorienterede årsager er udtryk for et ønske om kvalificering.

[2] Se endvidere fx. [Bregengaard 84, Christiansen 89, UVM 78a].

At vi bruger de tre årsagstyper som en ramme for analysen af det eksterne syn på matematikundervisning betyder, at vi må afdække, med hvilken tyngde årsags-typerne er repræsenteret, dels i det eksplicitterede formål, og dels i de *begrundelser* der fremføres i diskussioner om matematikundervisning. Flere forskellige årsager til at udbyde matematikundervisning kan således udmønte sig i ét formål med matematikundervisningen, og én årsag til matematikundervisning kan udmønte sig i flere formål med matematikundervisningen [Niss 96, p.15].

Når vi nu prøver at klarlægge årsagerne til først 60'er-matematikkens og siden 90'er-matematikkens udformning på gymnasieniveau, må vi derfor forsøge at læse både på og mellem linjerne, ved at "krydsklippe" mellem de officielt fremlagte formål med matematikundervisningen, og en *karakteristik* af det syn på undervisning generelt og matematikundervisning i særdeleshed, der var og er gældende i det omgivende samfund. Et sådant syn (eller flere sameksisterende) er svært at indfange, idet det er *sammensat*, *amorft* og *dynamisk*: Det er nødvendigvis sammensat af en række forskellige (indbyrdes afvigende) subjektive syn. Det er amorft (i modsætning til velafgrænset) grundet virkelighedens kompleksitet. For eksempel kan det ikke altid afgøres, hvordan et syn vil forholde sig til et fremtidigt fænomen (hvordan reagerer de forskellige politiske partier mon ved en invasion fra planet X). Det er dynamisk, som vi antydede i begrundelsen for at vælge netop 60'er matematikken som sparringspartner til den nutidige matematikopfattelse.

Politiske eller ideologiske holdningsspørgsmål er således en uundgåelig del af uddannelsesmæssige formåls-diskussioner[3], og derfor af vores karakteristik: Det bliver et kvalitetskriterie for vores deskriptive analyse, at den har en høj grad af gennemsigtighed. Vi pretenderer nemlig ikke at få "det hele med"—fuldstændigt at afdække fagopfattelsen—vores formål er at etablere nogle bestemte syn med *klare* karakteristika, der kan danne baggrund for analysen af potentialerne af problemløsning og modellering.

3.2 Den interne fagopfattelse

At matematikersamfundets faglige selvopfattelse er en relevant vinkel i analysen, virker måske ikke oplagt. At vi mener, det er tilfældet, skyldes de fortolkningsovervejelser vi fremlagde ovenfor, *kombineret* med en tese om, at matematikundervisningens *praksis* både hvad angår tilrettelæggelsesform og pædagogiske virkemidler i større grad, end mange måske forestiller sig, er påvirket af matematikersamfundets fagopfattelse, der af flere regnes for at

[3]Se fx. [Bregengaard 84, Ernest 91, Niss 96, UVM 78a].

overføres fra generation til generation mellem matematiklærerne—en overførsel præget af stor inerti, ligesom de fleste øvrige kulturelle områder. At tesen ikke er en selvindlysende sandhed bliver tydeligt ved at påpege, at den implicit antyder, at matematikundervisningens praksis kun i mindre grad er udtryk for en lydig implementering af de ovenfra udstukne formål med undervisningen.

Påstanden her er altså, at der ofte kan være meget langt mellem de samfundsmæssige formål med, og den praktiske gennemførelse af gymnasial matematikundervisning.

Kapitel 4

60'er-matematikken

Betegnelsen "den ny matematik" eller "60'er-matematikken" henviser ikke til en historisk periode, mest oplagt ti-året fra 1960-1970, men dækker over en nytænkning og reformering af matematikundervisningen i hele den vestlige verden, der slog igennem i første halvdel af 60'erne. I den danske gymnasieundervisning fik den formelt fodfæste med en bekendtgørelsesændring i september 1961, og var en realitet fra og med skoleåret 1963. Det er et gradsspørgsmål at afgøre, hvornår de tanker, der lå bag reformen, ikke længere dominerede den officielle politik vedrørende gymnasiets matematikundervisning. Vores fornemmelse er, at reformen stadig øvede væsentlig indflydelse sidst i 70'erne, og bekendtgørelsesmæssigt blev der først givet udtryk for markant anderledes ideer med gymnasiereformen i 1987.

Vores beskrivelse af de samfundsmæssige forhold, der gik forud for og øvede indflydelse på 1961-bekendtgørelsen, vil bevidst være "malet med den brede pensel", da hensigten ikke er at gennemføre en historisk kildekritisk analyse, men at give et indtryk af, hvilken samfundsudvikling "60'er-matematikken" var et resultat og en del af—at etablere en ekstern fagopfattelse af matematik og matematikundervisning.

4.1 Samfundsmæssige påvirkninger

4.1.1 Tiden før Anden Verdenskrig

I de første årtier af dette århundrede var der i det meste af den vestlige verden en voksende *anvendelsesorientering* i diskussionerne om matematikundervisningens berettigelse og udformning tæt knyttet til industrialiseringen. I modsætning til tidligere tiders noget ensidige fokusering på matematiks æstetiske og formative kvaliteter, skulle der nu også lægges vægt på at

demonstrere matematik som et nyttigt fag.[1] Denne ny-orientering satte sig kraftigt igennem i den primære[2] matematikundervisning, hvorimod undervisningen på det sekundære niveau fortsatte stort set uanfægtet med fokus på de "indre" kvaliteter. Man kan nævne i hvert fald to grunde til, at dette var tilfældet [Niss 87, p. 488]:

En *indholdsmæssig* grund var, at bredden i matematiks faktiske anvendelser indenfor andre videnskaber, og i forbindelse med hverdagsrelaterede praktiske gøremål, var langt mindre end tilfældet er nu, hvilket gjorde det mindre presserende at arbejde med disse sider af matematikken på det primære og sekundære niveau. Videnskabeligt var anvendelserne traditionelt koncentreret om de eksakte videnskaber, landmåling, forsikringsberegninger, og nogle få områder indenfor økonomi. Dette forhold ændrede sig dog gradvist gennem den første del af vores århundrede, specielt qua udviklingen af matematisk statistik[3], men det varede længe, før disse nye tendenser satte sig spor i den sekundære matematikundervisning. Hvad angår de hverdagsrelaterede matematikanvendelser gjorde de essentielt kun brug af aritmetik og i mindre grad simpel plangeometri, altså emner, der også dengang lå i den primære matematikundervisning.

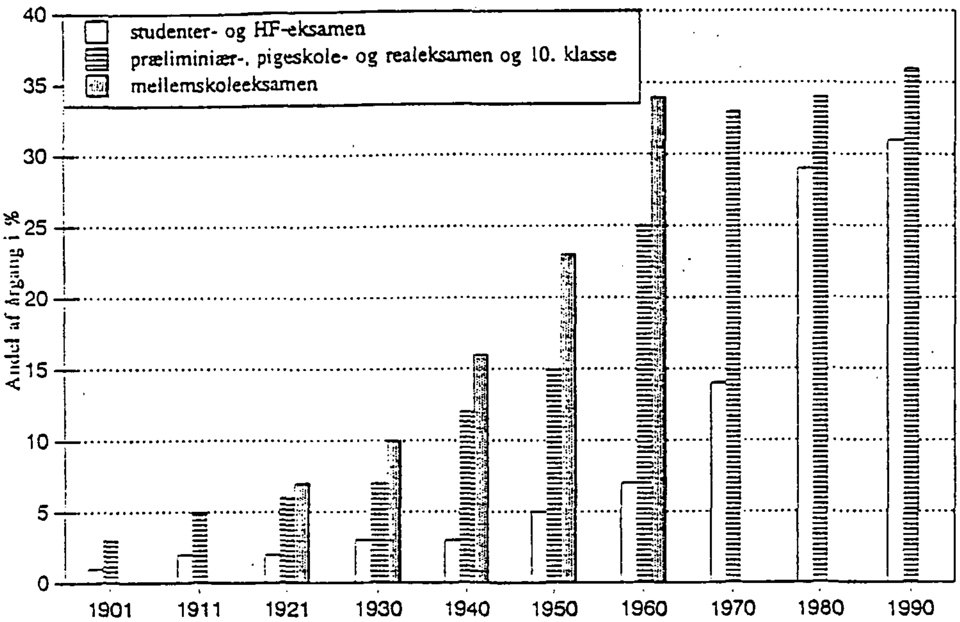
En *sociologisk* grund var, at det kun var en lille minoritet af en ungdomsårgang—fremtidens sociale elite—der modtog sekundær matematikundervisning. For så godt som alle skete det med henblik på fortsatte studier på et universitet eller en anden højere læreanstalt, primært indenfor de teknisk prægede videnskaber (ingeniører, arkitekter, fysikere, læger, aktuarer, mv.). Hovedparten af de heldige få ville derfor tids nok møde matematik i anvendelse. Det samfundsmæssige behov for at demonstrere anvendelighed

[1] Se fx. [Griffiths 74, pp. 16–19], [Niss 87, pp. 488–89] og [Niss 96, pp. 27–29].

[2] Med "den primære undervisning" refereres til et niveau svarende til undervisning af børn og unge indtil 12–13-års alderen, mens "den sekundære undervisning" dækker niveauet svarende til undervisning i teenage-årene. Al undervisning på et højere niveau end dette rubriceres som "den tertiære undervisning". Skæringerne i denne tre-deling af undervisningen er fornuftig set i et internationalt perspektiv, da det de fleste steder også svarer til den praktiske organisering af undervisningen. I Danmark er delingen rimeligt dækkende for forholdene dengang der kun var obligatorisk skolegang til og med 7. klasse, hvorefter flertallet valgte at stoppe. Vores nutidige—internationalt atypiske—skarpe skel mellem folkeskole og gymnasium sker jo imidlertid når eleverne er 15-16 år gamle, og går således på tværs af kategorierne "primær" og "sekundær". Da vi alt overvejende er nationalt orienterede, vælger vi dog alligevel at bibeholde de danske termer når vi snakker om danske forhold, frem for de uvante og knap så mundrette "primary and lower secondary teaching" (folkeskoleundervisning) og "upper secondary teaching" (gymnasieundervisning), der bruges i internationale undersøgelser.

[3] Som eksempel kan det nævnes, at den økonomisk-statistiske disciplin *økonometri*, der danner kernen i de nu politisk meget potente makroøkonomiske modeller, blev etableret i mellemkrigstiden. Se evt. [Dræby 95] for en nærmere præsentation af denne udvikling.

allerede på det sekundære niveau føltes således meget begrænset.



Figur 4.1 Andelen af hver danske årgang, der har afsluttet forskellige skoleeksamener, 1901–1990 [Iversen 96, p. 9].

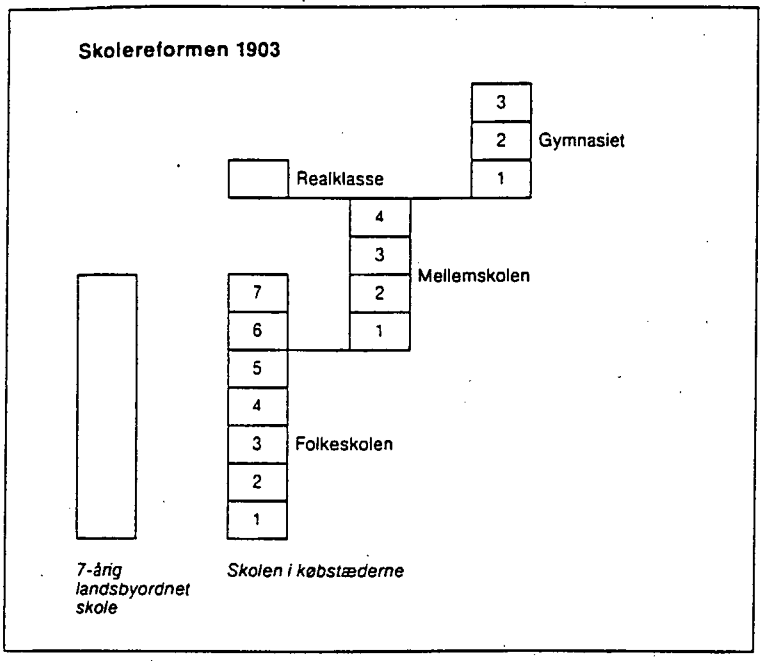
Denne internationale karakteristik afspejler til fulde de danske forhold såvel mht. de indholdsmæssige grunde som de sociologiske. Hvad angår sidstnævnte er det et interessant træk, at det før vedtagelsen af almenskoleloven i 1903 var praktisk taget umuligt for hovedparten af befolkningen, at gå fra folkeskolen til gymnasiet. Skolesystemet var ikke præget af den strukturelle sammenhæng, vi kender fra idag. Hver social klasse havde "sin" skole.

I Danmark modtog mellem 400 og 1000 om året matematikundervisning på gymnasialt niveau, svarende til mellem en og tre procent af en årgang, jvf. figur 4.1. Med vedtagelsen af loven af 1903 om højere almenskoler indførtes et strukturelt sammenhængende skolesystem; *enhedsskolen.* Nu fik arbejderklassens børn *formelt* (modsat *reelt*) mulighed for at komme i gymnasiet (i 1910 var ca. 10 % fra arbejderhjem) [Kruchov 85, p.134-135].

Skolesystemet anno 1903 kan strukturelt beskrives som på figur 4.2.

Bekendtgørelsen af 1906 og diskussionerne herefter

At matematikundervisningen i gymnasiet pegede frem mod videre studier, bekræftes af den officielle danske styring af gymnasiets matematikundervis-



Figur 4.2 Skolestrukturen efter 1903, [Kruchov 85, p.267].

ning. I bekendtgørelsen fra 1906, der var gymnasiets implementering af almenskoleloven fra 1903, er formålet med matematikundervisningen på den matematisk-naturvidenskabelige linje tilsyneladende åbenlys, da det slet ikke omtales i bekendtgørelsen, der udelukkende består af en detaljeret pensumbeskrivelse. Kun for den sproglige linje nævnes det eksplicit, at formålet med matematikundervisningen ikke så meget er at "bibringe Eleverne omfattende Kundskaber i Matematik [...] som at skole Elevernes Tænkeevne ved at indøve den gennem Matematikkens stringente Betragtningsmaader" [Pilemann 96, pp. 46–47 og 253–54]. Altså en eksplicit sværgen til det, der ofte betegnes matematikkens *formaldannende* egenskaber[4]. Indenfor den ramme vi har sat op, kan denne formålstilkendegivelse hhv. mangel på samme, ses som en understregning af en markant forskel i årsagerne til gymnasi-

[4]Arbejde med matematikken ansås for personlighedsudviklende. Fx mente man, at en logisk sans kunne opnås ved at arbejde med matematikkens indre struktur. Følgende passage fra et indlæg i bladet *Gymnasieskolen* fra 1919 illustrerer pointen: "I Matematikken bevises enhver paastand ved et *almen*gyldigt Bevis, hvis Sandhed ingen kan betvivle. De eksakte fag er personlighedsdannende, og derigennem bliver de i Virkeligheden ogsaa almendannende." [Pilemann 96, p.54] (vores fremhævning). Se også [Jensen 94].

ets matematikundervisning på de to linjer først i dette århundrede: For den matematisk-naturvidenskabelige linje var den politisk-kulturelle årsag med hovedvægt på sortering og samfundsmæssig reproduktion (og dermed også reproduktion af den sociale stratifikation dvs. sociale lagdeling) dominerende, mens den individ-orienterede årsag spillede en mindre rolle. For den sproglige linje var årsagerne derimod tilsyneladende udelukkende individ-orienterede, som nævnt med hovedvægt på formaldannelse.

Som en naturlig konsekvens af de modsatrettede træk i den igangværende internationale anvendelsesdiskussion vedrørende matematikundervisningen, og 1906-reformens mere eller mindre eksplicitte negligering heraf, fandt der en dansk debat om anvendelsers rolle i gymnasiematematikken sted, ikke mindst efter man havde fået lidt erfaring med de nye studenter, dvs. fra kort inden 1. verdenskrig og frem. Debatten foregik i såvel fagtidsskrifter og diskussionsklubber som i officielt nedsatte udvalg, og havde udover matematiklærere fra gymnasier og højere læreranstalter deltagelse af fagkonsulenter og andre ministerielle personer, samt gymnasielærere i fysik, kemi og astronomi, da diskussionen næsten udelukkende handlede om anvendelser inden for disse fag. Sagt kort handlede debatten om det hensigtsmæssige ved at vise nye sider af matematikken og fremme især den fysiske forståelse gennem inddragelse af eksempler herfra i matematikundervisningen, kontra det åndsudviklende ved "ren" matematikundervisning. Argumenterne for hver af disse positioner angik såvel *formålet* med gymnasiematematikken som effektiviteten af de to positioner som *middel* til at opnå et givet formål [Pilemann 96, pp.47–55].

Hvad formåls-diskussionen angår er det nye, at almendannende hensyn nævnes uafhængigt af de veletablerede studieforberedende hensyn. Set i forhold til den nuværende eksplicit fremførte dobbelthed i gymnasiematematikkens formål, jævnfør omtalen i kapitel 1, er der en interessant ting at bemærke om de indlæg i debatten, der taler for større anvendelsesorientering. Det er nemlig langt fra ensidigt almendannende hensyn, der fremføres som (subjektiv) begrundelse for større anvendelsesorientering. Et tidligt bekendtskab med naturvidenskabelige matematikanvendelser nævnes også som et effektivt middel i studieforberedende øjemed, samt som en effektiv og motiverende måde at tilegne sig matematisk viden på.

Bekendtgørelsesændring af 1935

I den bekendtgørelsesændring, der efter lang tids forarbejde trådte i kraft i 1935, blev der taget hensyn til begge de to positioner i debatten, men de kom meget forskelligt til udtryk for den sproglige og den matematisk-naturvidenskabelige linje. For den sproglige linje ændredes prioriteringen i fremstillingen radikalt, idet formålet nu blev at demonstrere matematiks anvendelighed, mens den teoretiske præsentation skulle styres heraf.[5]

For den matematisk-naturvidenskabelige linje, der nu fik en egentlig formålsbeskrivelse, var det derimod den indre sammenhæng i præsentationen, der blev sat i centrum, mens anvendelsesorienteringen skulle tilgodeses gennem samarbejde med de andre naturvidenskabelige fag.[6]

Indenfor den af os etablerede diskurs tyder dette på, at den samme overordnede årsags-kategorisering som i starten af århundredet stadig gælder for begge gymnasiets grene, men at indholdet under "overskrifterne" har ændret sig noget som følge af diskussionen om almendannelse og anvendelsers rolle i gymnasiematematikken. For den matematisk-naturfaglige linje er det stadig den politisk/kulturelle årsag, der synes at dominere, men den individorienterede årsag ser ud til at have vundet terræn, at dømme efter den tiltagende hævdelse af almendannelse som selvstændigt formål. Anvendelsesdiskussionen har her primært sat sig spor ved at pege på tværfaglighed indenfor naturvidenskaberne som et måske effektivt *middel* til at tjene det studieforberedende formål, der stadig synes altdominerende. For den sproglige linje har anvendelsesdiskussionen sat sig kraftige spor, idet det hverdagsagtigt nytteorienterede formål har erstattet det tidligere formaldannende formål som udmyntningen af den individ-orienterede årsag.

Den øgede fokusering på almendannelse som formål for matematikunder-

[5]Den præcise ordlyd i bekendtgørelsen, gengivet i [Pilemann 96, pp. 255–56], er:

> "Formaalet med Undervisningen er at give Eleverne Kendskab til visse vigtige Anvendelser af Matematikken. Af de teoretiske Afsnit medtages saa meget, at dette Formaal kan opfyldes. [...] Ved Undervisningen skal Hovedvægten lægges paa Matematikkens Anvendelse i det praktiske Liv inden for de i Anordningen givne Rammer. Ved valg af Øvelseseksempler bør man derfor, overalt hvor det er muligt, søge tilknytning til det praktiske Liv. Tillige bør der inddrages Materiale (Tabeller og grafisk Afbildning), som finder Anvendelse ved Undervisningen i andre Fag, f.Eks. Naturfag og Historie."

[6]Her lyder den præcise ordlyd med samme kilde-reference:

> "Formaalet med Undervisningen er at bibringe Eleverne Kendskab til de Reelle Tal og disses Anvendelse til Beskrivelse af Funktioner, samt Kendskab til simple Figurer i Planen som i Rummet. Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske Formelapparat og opnaa Sikkerhed og Færdighed i numeriske Beregninger. [...] Undervisningen bør i saa høj Grad som muligt tilstræbe en Sammenhæng melle de forskellige Dele af Stoffet, og Funktionsbegrebet træder herved naturligt i Forgrunden. [...] Der bør tilstræbes et Samarbejde med de Fag, specielt Fysik, hvor Matematikken kan komme til Anvendelse. Ved Planlæggelsen af Undervisningen bør der derfor tages saadanne Hensyn, at dette Samarbejde kan blive frugtbart."

visningen i gymnasiet antyder umiddelbart, at en massiv andel af befolkningen får mulighed for at modtage gymnasial undervisning. Den skolepolitik, der var en realitet to år senere med indførslen af skoleloven af 1937, afspejler imidlertid kun i nogen grad dette. Det var et socialdemokratisk/radikalt projekt, og derfor fulgt på vejen med tanker om lighed gennem uddannelse og en skoleform tilpasset arbejderklassens muligheder og behov.[7] Folkeskolen efter 5. klasse deltes herefter i eksamensmellemskolen og den eksamensfri mellemskole, begge med yderligere 4 års undervisning, hvoraf de to første år var obligatoriske.

På figur 4.3 ses den strukturelle opbygning af skolesystemet under 1937 loven. I tilknytning til figuren skal det bemærkes, at ændringen kun havde betydning for "købstadsskolerne", dvs. for de ca. 40 % af befolkningen, der ikke boede på landet. Det er altså stadigvæk en ganske lille procentdel der *reelt* har mulighed for at komme i gymnasiet—en mulighed der skal tages stilling til efter 5. klassetrin, hvis man ikke er landboer. På landboskolerne, hvor skolen mange steder ikke var udbygget med en klasse pr. årgang, indgik matematik slet ikke i læseplanen [Kruchov 85, p.269].

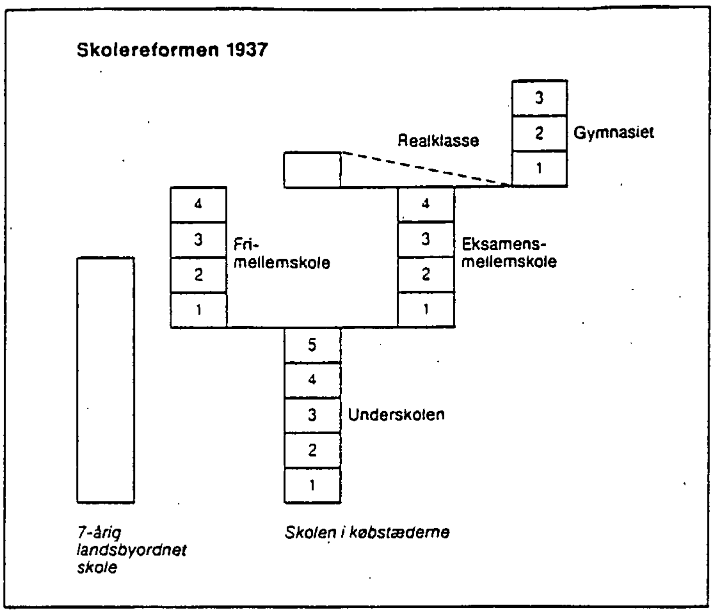
Hvordan reaktionerne på denne udvikling i matematikundervisningens formålsparagraf og de samfundsmæssige forandringer var, må vi springe frem til efter Anden Verdenskrig for at vurdere, da der ikke var meget overskud til at forholde sig til matematikundervisningens formål og praksis i det mellemliggende tiår.[8]

4.1.2 Tiden efter Anden Verdenskrig

Forsøget på i løbet af 30'erne at finde en fornuftig realisering af den igangværende anvendelsesdiskussion i den sekundære matematikundervisning, var ikke et isoleret dansk fænomen. Reaktionen var derfor også international, da man i årene efter Anden Verdenskrig havde fået erfaring med konsekvenserne af de gennemførte ændringer af den sekundære matematikundervisning. Der var over en bred front stigende bekymring blandt de mennesker, der forsøgte at vurdere resultatet af matematikundervisningen: Anvendelsesorienteringen

[7]Fx. var eksamensfrimellemskolen mere praktisk- og emneorienteret. Den socialdemokratiske undervisningsminister Borgbjerg, der i 1934 fremsatte lovforslaget, knyttede den oprindeligt til et års yderligere skolepligt, således at den kunne blive til et reelt alternativ til eksamensmellemskolen. Han nåede aldrig selv at realisere loven, og derfor heller ikke at opleve, at den ikke blev knyttet med yderligere et års undervisningspligt grundet de borgerlige partiers modstand mod dette "indgreb i forældrenes ret til selv at opdrage deres børn" [Kruchov 85, p140-142].

[8]Det betyder ikke, at matematik som *videnskab* ingen opmærksomhed fik i tiden omkring Anden Verdenskrig. Men matematik som *undervisningsfag* blev ikke viet samme interesse som både før og efter krigen.



Figur 4.3 Skolestrukturen efter 1937, [Kruchov 85, p.268].

virkede simpelthen ikke fremmende ift. de opstillede formål, men medførte større grad af udenadslære og ringe begrebs-forståelse. At vende denne udvikling, og skabe grobund for en bedre matematisk *forståelse*, var derfor en central bevæggrund for de reformer af matematikundervisningen, der blev sat i værk i tiden efter Anden Verdenskrig [Niss 96, pp. 30–31].

Internationalt pres for uddannelsesreformer

Eftersom ansvaret for arbejdskraftens vidensniveau var og er en af uddannelsessystemets helt centrale funktioner, er det ikke så overraskende, at man fra politisk side følte behov for mere gennemgribende ændringer af uddannelsessystemet som reaktion på de nye samfundsstrukturer, der var under udvikling. Således nævner Ole Skovsmose [Skovsmose 80, p. 12], at en lignende udvikling hvad den primære undervisning angår fandt sted omkring 100 år tidligere i Danmark. Dengang gjorde Landboreformen, at også den almindelige arbejder havde et behov for simpel aritmetik ifm. beregninger af varemængder, priser, o.lign. Da regning ikke tidligere var en obligatorisk del af den primære undervisning, der var centreret om "Guds saliggørende

Kundskab", gennemførte man efterfølgende en skolereform; "Samfundet ændres, kvalifikationskravene ændres, og dermed ændres skolen."

Mogens Niss tegner i [Niss 96] et billede af, at formålsdiskussionen gennem det 20 århundrede mht. vægtningen af de tre grundliggende årsager vi opstillede i kapitel 3, har bølget frem og tilbage. De økonomisk/tekniske nytteorienterede årsager (herunder de individorienterede (kvalifikative)) årsager var særligt dominerende omkring århundredeskiftet, senere i 1930'er og igen i 1970'erne, 1980'erne og starten af 1990'erne. De politisk/kulturelle årsager får relativ mere vægt i starten af 1920'erne og fra slutningen af 1950'erne og frem til 1960'erne—perioder han karakteriserer som "...times of economic and cultural optimism and progress." [Niss 96, p.23f]. Den kraftige økonomisk vækst, der i løbet af 50'erne blev en realitet i hele den vestlige verden,[9] muliggjorde at der kunne afsættes mange ressourcer til gennemførelsen af disse ændringer.

I de vestlige lande var der bred enighed om, at det var økonomisk fremgang, der var samfundets overordnede formål med den uddannelsesmæssige satsning. I den forbindelse var der en stadig større enighed om, at store *mængder* arbejdskraft ikke i sig selv var svaret, men at arbejdskraftens *vidensniveau*—"the human capital"—var nok så væsentlig. Et afgørende kvalifikationskrav var således kompetence i at udvikle og udnytte produktionsforhold, der muliggør øget produktivitet. Det vil vi referere til som *teknologisk kompetence*, hvilket svarer til datidens optimistiske teknologibegreb, der opfatter teknologien som "en størrelse mennesket indskyder mellem sig og naturen" for bedre at kunne få magt over den og nyttiggøre den.[10] Herved bliver teknologisk udvikling per definition frihedsforøgende, hvilket afspejledes i datidens opfattelse af, at det var en tilstrækkelig betingelse for et lykkeligere samfund [Skovsmose 80, pp. 10–13].

USA havde allerede i 1940'erne truffet foranstaltninger til en styrkelse af naturvidenskabernes og matematikkens position i uddannelsessystemet, både hvad indhold, rammer og ikke mindst ressourcer angik [Branner-Jørgensen 81]. Fx. nævner [Davis 81, p. 94ff], at militærindustrien i USA kraftigt efterspurgte matematisk arbejdskraft såvel under Anden Verdenskrig (fx. kryptografi, aerodynamik, udviklingen af radar, kontrolteori mv.), som den efterfølgende koldkrigsperiode, hvor den spirende computerin-

[9]Den gennemsnitlige årlige vækstrate i bruttonationalprodukt pr. indbygger var i årene 1913–50 på mellem 0,9% og 2,6% i de vestlige lande og Japan (aritmetisk gennemsnit: 1,8%), mens de tilsvarende tal i perioden 1950–73 lå mellem 2,6% og 8,0% (aritmetisk gennemsnit: 4,5%).

[10]For en diskussion af forskellige opfattelser af relationen teknologi–frihed, se kapitel 1 i Jensen, Hans Siggaard og Ole Skovsmose: *Teknologikritik—et teknologi-filosofisk essay*, Systime, 1986.

dustri var den primære efterspørger, og hvor sputnik-chokket[11] af flere nævnes at have været et ekstra incitament for kongressen til at afsætte midler til forbedring af teknisk-naturvidenskabelig arbejdskraft. I Europa var det primært den økonomiske samarbejdsorganisation OEEC, det senere OECD[12], der var den drivende kraft. Ligesom i USA blev hovedvægten lagt på at videreudvikle uddannelserne indenfor de eksakte naturvidenskaber, ikke mindst matematik, da det var ved at arbejde fornuftigt med disse fagområder, man mente man kunne udvikle den ønskede teknologiske kompetence. Denne tro på matematiks produktive egenskaber, og den afledte betoning af økonomisk-teknologiske årsager til at udbyde matematikundervisning på det sekundære og tertiære niveau, fik i løbet af 50'erne så stor udbredelse, at den spirende begrundelsesdiskussion fra før Anden Verdenskrig blev helt overflødiggjort, og derfor for en tid næsten forstummede. I stedet blev ressourcerne brugt på at overveje, hvordan form og indhold for "den ny matematik" skulle være.

Royaumont-seminaret

Det initiativ, der for matematikundervisningens vedkommende nævnes som det, der fik mest direkte indflydelse på de gennemførte reformer, er et seminar afholdt på det franske slot Royaumont i 1959 [OECD 61]. Også her var det langt overvejende matematikundervisningens form og indhold frem for dens begrundelse, der var til diskussion, men i et indledningsforedrag til konferencen omtaler formanden for seminaret, Marshall H. Stone, hvorfor han mener, der er behov for radikal nytænkning indenfor matematikundervisningen:

> "There are two major factors which require us to examine with fresh eyes the mathematics we propose to teach to young people in the secondary schools and in the first years at university. One is the extraordinary growth of pure mathematics in modern times. The other is the increasing dependence of scientific thought upon mathematical methods, coinciding in time with a more and

[11][Iversen 96, pp. 26–27] og [Skovsmose 80, pp. 14–15] citerer begge fra bogen *Mathematics: Society and Curricula* af Griffiths og Howson, Cambridge University Press, 1974. Da Sovjetunionen i november 1957 sendte den første Sputnik-satellit i kredsløb om jorden, forstærkedes frygten for, at USA ikke længere havde det store forspring i det teknologiske kapløb.

[12]OEEC; Organisation for European Economic Co-operation. Dannet i 1948 med de fleste vesteuropæiske lande som medlemmer, med det formål at tilrettelægge og fremskynde Europas økonomiske genopbygning, i første omgang som forvalter af den amerikanske Marshall-hjælp, senere ved egen drift. OECD; Organisation for Economic Co-operation and Development. Oprettet i 1961 som OEECs videreførsel tilføjet amerikansk og canadisk medlemsskab. Formålet var uændret, jvf. [OECD 61, p. 4].

> more urgent social demand for the services of scientists of every description" [OECD 61, p. 15].

Hvad Stone tænker på med den første faktor; "the extraordinary growth of pure mathematics in modern times", vender vi tilbage til i næste afsnit om 60'er-matematikkens interne matematikopfattelse. Hvad angår den anden faktor giver Stone under overskriften "Need for Modern Spirit" tydeligt udtryk for, at det er den økonomisk-tekniske begrundelse for en nytte-orienteret matematikundervisning, der—også her—tænkes på:

> "In this period of history it is the rise of modern science and the ensuing creation of a technological society which compels us to give increasing weight to the utilitarian argument for the more intensive teaching of mathematics. In fact, it is no longer possible to treat adequately the place of mathematics in our schools without going into its relations with modern science and technology. Indeed, if there is a crisis in education at this time—and there are many of us who believe so—it has arisen largely because no technological society of the kind we are in the process of creating can develop freely and soundly until education has adjusted itself to the vastly increased role played by modern science in human affairs. [...] Thus the teaching of mathematics is coming to be more and more clearly recognized as the true foundation of the technological society which it is the destiny of our times to create. We are litterally compelled by this destiny to reform our mathematical instruction so as to adapt and strengthen it for its utilitarian role of carrying the ever heavier burden of the scientific and technological superstructure which rests upon it" [OECD 61, pp. 17–18].

4.1.3 Samfundets indretning til diskussion

For at forstå udviklingen af matematikundervisningen i Danmark i disse år, er det helt afgørende at se debatten i forhold til de særlige samfundsmæssige udviklingstræk, der gjorde sig gældende i perioden.

Op til Anden Verdenskrig sker der flere ting, der er startskuddet til den måde, planlægning og styring af vores samfund foregår på den dag idag. For det første får visse grupper legitimeret indflydelse på grund af deres særlige *professionelle* kvalifikationer: I [Kühle 96] og [Dal 84] nævnes fx., at lægerne i høj grad er med til at præge (og faktisk beslutte) udviklingen, der fører til statens indblanding i sociale forhold (børnearbejde og sundhedsvilkår). For det andet kan man i perioden tale om en *korporatistisk* tendens: Staten søger støtte og opbakning bag den stadigt hyppigere indgriben i de frie markedsmekanismer hos arbejdsmarkedets organisationer; fagforeningerne og arbejdsgiverorganisationerne. Disse inddrages i de politiske drøftelser, får sæde i kommissionerne, og indsættes endelig i nævn og råd, der får til opgave at administrere love som arbejdsløshedslovgivning, erhvervsstøttelovgivning, importregulering mv. [Dal 84, p.123].

I *genopbygningstiden (1945-1950)* efter krigen er den fremtidige indretning af samfundet til diskussion. Den allerede påbegyndte udvikling i retning af korporatisering tager for alvor fart. I [Pedersen 94] benyttes vendingen "planlægningen af 'projekt Danmark"'. Hovedrollen i dette "projekt" skulle spilles af Forfatningskommissionen 1946-53 og forvaltningskommisionen af 1946. Men i realiteten var det i medie- og kulturdebatten og i kommissioner som fx. Arbejdsmarkedskommissionen 1949-56, at grundlaget for det velfærdssamfund og den *forhandlingsøkonomi*, vi kender fra idag, blev skabt [Pedersen 94, p. 22].

Med rette kan perioden fra krigen og frem til 60'erne kaldes for *dannelsen af velfærdsstaten*[13]. Jørgen Dalberg-Larsen udtrykker det således: "Det forekommer ikke urimeligt at hævde, at den [velfærdsstaten] først får et klart *politisk flertal* bag sig i *trediverne* og den får status som en helt almen fællesideologi hævet over politiske stridigheder i løbet af *halvtredserne* og specielt *tresserne*." [Dal 84, p.124].

Lokomotivet foran det hele var en stigende økonomisk vækst. Den sociale velfærdspolitik og økonomiske politik blev: "ganske tæt *sammevævet*, bl.a. *ud fra den filosofi*, at en *forbedring af de generelle levevilkår*, og en *udjævning* i disse levevilkår bedst kunne foretages, når *samfundskagen var stor og voksende*." [Dal 84, p.124].

Det der overordnet set karakteriserer perioden op til 1958, er således, at uddannelsespolitikken via arbejdsmarkedspolitikken blev gjort helt central i skabelsen af velfærdsstaten. Og det skete i en bred enighed:

> "Her [Arbejdsmarkedskommissionen] blev de selv samme økonomer, som havde lagt grunden til indførelse af nationalbudget og organismetanke nu sat til at omsætte deres tegninger til anvendelig politik. Og det lykkedes! Det lykkedes, at nå til bred

[13]Begrebet *velfærdsstat* bruges for samfund, hvis indretning bla. er karakteriseret af høj grad af social sikkerhed, dvs. samfund hvor den sociale stratifikation (lagdeling) nok eksisterer, men er *relativ* lav. Nogen bruger betegnelsen *socialstat* om samme type. En velfærdsstat er karakteriseret ved, at befolkningens velfærd er et formuleret mål i den offentlige politik, og hvor staten træffer aktive tiltag for at nå dette mål. En velfærdsstat er altså en *aktiv* stat, der *intervenerer* i de frie markedskræfters spil med henblik på omfordeling af ressourcerne.

> enighed mellem de vigtigste partier, arbejdsmarkedets organisationer og de centrale embedsmænd om at udpege arbejdskraftens mobilitet og uddannelse til omdrejningspunktet for samfundsøkonomisk vækst. [...] Vækst og arbejdsmarked blev koblet sammen.[Pedersen 94, p. 39]

Målet var altså ikke produktivitetsforøgelse og økonomisk vækst i sig selv, men som et middel til at tilvejebringe en grundlæggende social tryghed og til at skabe de økonomiske forudsætninger for større lighed. Fuld beskæftigelse, social tryghed og uddannelse for alle uanset social baggrund har derfor været centrale elementer i de sociale og økonomiske reformer [Friisberg 77, p.15].

Konkrete tiltag; teknikerkommisionen og læseplansudvalg

Som en konsekvens af denne politiske konsensusløsning, besluttedes det at nedsætte en række udvalg til belysning og afhjælpning af problemet. I en regeringsudtalelse den 10. juli 1956 hedder det således:

> "I erkendelse af, at der her foreligger en omfattende række indbyrdes sammenhængende problemer [mangel på teknisk kvalificeret arbejdskraft i den kraftigt ekspanderende industrielle sektor og uddannelsespolitik], og at det er af den allerstørste betydning for landets fremtidige økonomiske fremgang, at der hurtigt tilvejebringes egnede løsninger, har regeringen besluttet at nedsætte tre udvalg af sagkyndige til at kortlægge hele problemområdet og formulere forslag til påkrævede foranstaltninger." [SM 59, p.87].

De tre udvalg var (1) et mindre udvalg der havde til opgave at løse de mest presserende problemer ved at indstille "...om foranstaltninger som kan og bør træffes omgående med henblik på at forøge antallet af teknikere..." [SM 59, p.87] (2) et udvalg der skulle behandle "problemerne vedrørende den *matematisk-naturvidenskabelige uddannelses* karakter og omfang..." og endelig (3) et bredere sammensat udvalg der skulle behandle "*de mere generelle uddannelsesproblemer*, som hele den tekniske udvikling rejser *på noget længere sigt.*" Det sidstnævnte udvalg blev betegnet "Teknikerkommisionen", og det skulle fungere som det centrale led i undersøgelserne. Den konkrete opgave var:

> "*at* opridse de tendenser, den fremtidige tekniske udvikling indebærer med hensyn til behovet for ingeniører og andre teknikere af forskellige faggrupper og kvalifikationsgrader, og

> *at* skitsere rammerne for den fremtidige tekniske uddannelse med henblik på at sikre en udvidelse og effektivisering af hele denne uddannelse." [SM 59, p.7]

Det er iøvrigt interessant at bemærke, at der i statsministeriets meddelelse om oprettelse af teknikerkommissionen af 28. september 1956 nævnes at: "...udvalget bør [endvidere] overveje de problemer, som kan opstå ved dannelsen af en stor samfundsgruppe af tekniske funktionærer."[SM 59, p.88], og at denne formulering er fraværende i kommisionens egen fortolkning af kommissoriet i betænkningens forord.

Anbefalingerne kan over en bred kam siges at pege på det både rentable og nødvendige i øgede bevillinger til uddannelse på alle niveauer indenfor de naturvidenskabelige og tekniske områder. Blandt andet foreslås gymnasieskolernes kapacitet udvidet, og opførelsen af H.C. Ørsted Instituttet sker på initiativ herfra.

Anvendelsesorientering i 50'erne

På den 2. nordiske fysik- kemi- og matematiklærerkongres i 1954 kommer det teknologi-optimistiske fremtidssyn til udtryk, da daværende undervisningsminister Julius Bomholt åbner kongressen med følgende konstatering:

> "Det er disse videnskaber, der er hovedfundamentet under vor tids industri, vor tids beherskelse af kloden og naturkræfterne, og et uundværligt redskab for fortsat erkendelse af det univers, der omgiver os. [...] Den undervisning, som den højere skoles elever får i fysik, kemi og matematik, skal være det solide og bæredygtige fundament, som de kan bygge videre på, hvis de efter skolen kaster sig ud i fortsatte studier, som skal føre dem frem til stillinger som ingeniører, læger og videnskabsmænd" (citeret efter [Pilemann 96, p. 106]).

Senere giver han om matematiks fremtrædelsesform udtryk for, at

> "[...] det vil styrke faget pædagogisk, hvis man kunne give børnene og de unge et indtryk af, hvad matematik kan bruges til, dvs. at teori i nogen grad modsvares af anskueliggørende opgaver" (igen citeret efter [Pilemann 96, p. 106]).

Denne udmelding er en replik til den diskussion om anvendelsers rolle i gymnasiets matematikundervisning, der med stigende kraft igen fik mæle i løbet af 50'erne. Set i forhold til diskussionen, der ledte op til bekendtgørelsesændringen i 1935, er Bomholts kommentar udtryk for en generel drejning i debatten. Ganske som før Anden Verdenskrig betones det studieforberedende formål med den matematisk-naturvidenskabelige gymnasieundervisning, men i pagt med tiden sker det nu med udgangspunkt i en økonomisk/teknisk begrundelse, frem for den førhen dominerende politisk/kulturelle begrundelse. Den økonomisk/tekniske årsags mere og mere objektive status gjorde, at diskussionen gradvist kom til næsten udelukkende at handle om anvendelsers effektivitet som middel ifm. den matematiske begrebstilegnelse, og ikke som tidligere også om inddragelsen af eksempler på anvendelser som led i at tjene et almendannende formål, jvf. omtalen side 55.

Ved den bekendtgørelsesændring, der fandt sted i forbindelse med en revidering af grundloven i 1953, kom denne nye holdning meget håndgribeligt til udtryk. For den sproglige linjes vedkommende havde man det indtryk, at 1935-bekendtgørelsens opprioritering af anvendelsers rolle i undervisningen havde medført ringere forståelse, og ikke bedre, som man havde håbet. Desuden havde matematikundervisning for denne elevgruppe aldrig haft en studieforberedende begrundelse, og det var følgelig ikke herfra, man skulle hente de primære bidragydere ifm. den teknologiske "oprustning". Bla. af disse årsager valgte man derfor at tage matematik helt ud af fagviften på den sproglige linje. På den matematisk-naturvidenskabelige linje skulle der ift. tidligere lægges yderligere vægt på begrebsmæssig sammenhæng og stringens i præsentationen[14], mens erfaring med anvendelser at matematikken stadig skulle foregå ved samarbejde med specielt fysik [Pilemann 96, p. 105 og 123].

I årene efter bekendtgørelsesændringen blev anvendelsers rolle bedømt gradvist mere positivt. Den almindelige holdning var, at en vis anvendelsesorientering i selve matematikundervisningen ville virke fremmende på den generelle lyst til at studere faget, hvilket også i Danmark ansås for at være en nødvendig forudsætning for opnåelsen af den så eftertragtede teknologiske kompetence. Lærebøgerne til gymnasiet kom derfor til at indeholde et mindre antal eksempler på anvendelser, primært fra fysik, astronomi, rentesregning og kombinatorik, og der gennemførtes forsøg med indførelsen af sandsynlighedsregning, der oplagt kan præsenteres anvendelsesorienteret [Pilemann 96,

[14]Den præcise ordlyd i bekendtgørelsen, gengivet i [Pilemann 96, p. 257], er:

> "Formålet for undervisningen er at bibringe eleverne kendskab til et fundamentalt område af matematikken og gennem arbejdet hermed at udvikle og skole deres evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform samt hos eleverne at opøve sikkerhed og færdighed i brugen af det matematiske formelsprog og i udførelsen af numeriske beregninger. [...] Undervisningen bør i så høj grad som muligt tilstræbe en sammenhæng mellem de forskellige dele af stoffet, og funktionsbegrebet træder herved naturligt i forgrunden."

p. 109 og 123ff].

Mere grundlæggende skolereformer igangsættes

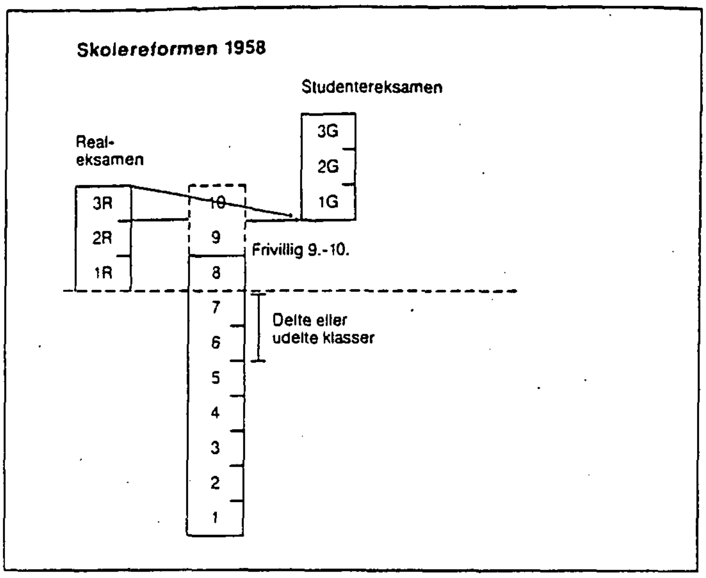
Med vedtagelsen af en ny skolelov for både folkeskolen og gymnasiet i 1958, blev der åbnet mulighed for reformer på form- og indholdssiden. Alle de hidtidige bekendtgørelsesændringer for gymnasiet havde hvilet på almenskoleloven fra 1903, så vedtagelsen af den nye skolelov kan først og fremmest ses som et klart signal om, at man nu ønskede mere gennemgribende ændringer.

Når uddannelsesniveauet på arbejdsmarkedet blev gjort til et problem for den fremtidige vækst, blev løsningen et generelt højere uddannelsesniveau: Den almendannende folkeskoleundervisning skulle opprioriteres således at alle fremtidige (erhvervsaktive) borgere blev bedre udrustet til et højteknologisk arbejdsmarked. Flere skulle igennem den eksisterende overbygning (gymnasiet). Med ønsket om en større rekrutteringsbasis bliver de sociologiske forhold af betydning for udviklingen.

Efter Anden Verdenskrigs afslutning blev elevdifferentieringen, der var en konsekvens af skolelovene fra 1903/1937, således i stigende grad kritiseret.[15] Efter flere politiske slagsmål og kovendinger undervejs lykkes det for den socialdemokratiske/radikale regering med opbakning fra venstre og lærerforeningerne at få vedtaget en ny skolelov i 1958. [Kruchov 85, p. 143ff] og [UVM 78a, p. 26ff]. Endelig var mellemskolen afskaffet, og hvad der var vigtigere; der var nu ikke længere nogen forskel på landbyskolerne og byskolerne. Skolestrukturen var nu således, at eleverne skulle deles efter 5. klasse i 'almene' og 'boglige', men det kunne vedtages at lade være, og det blev i løbet af de næste 10 år det almindeligste [Kruchov 85, p. 269]. I fin overensstemmelse med samfundets krav havde skolen nu følgende overbygningsstruktur: Efter 7. klasse blev eleverne delt i en 8.-9.(og senere 10.) klasseafdeling (for dem der bagefter skulle direkte ud i erhvervsarbejde eller i lære) og en mere boglig 3-årig realafdeling (for dem der skulle være mellemteknikere/tjenestemænd eller sidenhen på gymnasiet efter 2. eller 3. real), se figur 4.4.

Hvilke ændringer der konkret skulle gennemføres, lod man fra politisk side

[15] I 1945 udgav Socialpædagogisk Forening og Frit Danmarks lærergruppe et hæfte med deres skoletanker, bla. oprettelse af Danmarks Lærerhøjskole i Emdrup [Kruchov 85, p.142-143]. I 1952 udsendte en række lærerforeninger en betænkning om ønskelige forbedringer af den delte skole. De ville ændre den fri mellemskole, men iøvrigt beholde det gamle system. I [Kruchov 85] omtales, hvordan undervisningsminister Julius Bomholt i sin bog fra 1955 ridser de modsætninger op, som han forsøger at forlige i det skolelovsforslag, han havde fremsat samme år. Med de konservative og dele af Venstre i ryggen står lærerforeningerne for at bevare mellemskolen på den ene side, og socialdemokratiet og de radikale på den anden side, med tanker om at skabe en enhedsskole med samme struktur for alle indtil 15 års-alderen.



Figur 4.4 Skolereformen 1958, [Kruchov 85, p.270].

være op til to læseplansudvalg for hhv. folkeskolen og gymnasiet at komme med forslag til. Resultatet var betænkningerne "Undervisningsvejledning for folkeskolen" og "Det nye gymnasium" [UVM 60], der begge kom i 1960.

Folkeskolebetænkningen, der efter farven på omslaget også kaldes "Den blå Betænkning", gør ikke overraskende opmærksom på, at datidens samfundsmæssige udvikling gjorde nye typer af kvalifikationer nødvendige. Også her er teknologi-optimismen tydelig. Men ifølge [Høyrup 79, pp.54–56] og [Iversen 96, pp. 24–25] bliver der eksplicit givet udtryk for, at det i forbindelse med en større skolereform som den igangværende også var vigtigt at sætte fokus på meget andet end forhold, der direkte relaterede sig til uddannelsernes form og indhold, som udviklingen af teknologisk kompetence typisk gjorde. Således lød det om folkeskolens overordnede formål:

> "Det er skolens formål at dygtiggøre børnene til at gå ud i samfunds- og erhvervslivet, velegnede til at opfylde de krav, man med rimelighed kan stille, men først og fremmest er det skolens opgave at fremme alle muligheder for, at børnene kan vokse op som harmoniske, lykkelige og gode mennesker" (citeret efter [Iversen 96, p. 25]).

Sidste del af denne formålsbeskrivelse indikerer kraftigt, at den individorienterede årsag havde en fremskudt placering hvad den generelle folkeskoleundervisning angår. Og [Kruchov 85, p. 146] vurderer da også, at den største ændring, 1958-loven afstedkom, var ligestillingen mellem by- og landsbyskolen. Nu var der reel mulighed for at børn, uanset hvilken skole de kom fra, efter 7. klasse kunne komme videre i uddannelsessystemet.

I gymnasiebetænkningen—der selvforklarende får tilnavnet "Den røde Betænkning"—bliver der i de indledende ikke-fagspecifikke afsnit ligeledes diskuteret forhold, der rækker langt udover selve læseplansudformningen. Her argumenteres der imidlertid på en måde, der mest rimeligt kan fortolkes som havende rod i en politisk/kulturel årsag til at udbyde undervisning på gymnasialt niveau. Diskussionen er meget præget af overvejelser ifm. et nu udtalt behov for at finde en balance mellem gymnasiets almendannende og studieforberedende hensyn. De studieforberedende hensyn trækker i retning af en stadig mere specialiseret arbejdskraft, med behovet for teknologisk kompetence brugt som eksempel: "Eksempelvis vil automatiseringen jo kræve en helt ny type medarbejdere med en ny og højere, teknisk, uddannelse" [UVM 60, p. 16]. En sådan specialisering igangsat allerede på det gymnasiale uddannelsesniveau, kan imidlertid let komme i konflikt med de almendannende hensyn, der i en politisk/kulturel årsags-sammenhæng har uddannelsen af eleverne til velfungerende borgere i et demokratisk samfund som et centralt element:

> "En befolkning sammensat af specialister, der betragter omverdenen ud fra snævert faglige synspunkter uden kendskab til og forståelse af den øvrige befolknings kår og anskuelser, har dårlige forudsætninger for at føre samfundet videre i samarbejde efter demokratiske principper. [...] *Forholdet mellem individ og samfund og forholdet mellem de enkelte individer i et demokratisk samfund* rejser også problemer, der har tilknytning til skolen. De enkelte skal have så meget kendskab til biologi, geografi, historie, økonomi, sociale forhold og samfundets funktioner, at de har forudsætninger for at tage kritisk stilling til offentlige anliggender og modstå propaganda ved at klargøre sig dens egentlige hensigter og sammenholde den med de faktiske forhold" [UVM 60, pp. 16–17].

Rent organisatorisk er det overvejelser som disse, der er baggrunden for indførelsen af det grendelte gymnasium, som sker direkte på foranledning af betænkningens anbefalinger [Ibid., p. 28f]. På den sproglige linje skal eleverne nu efter 1.g. vælge mellem hhv. ny-sproglig, gammel-sproglig og samfundssproglig gren, og på den tidligere matematisk-naturvidenskabelige linje står

det tilsvarende valg mellem matematisk-fysisk, matematisk-naturfaglig og matematisk-samfundsfaglig gren.

Matematikundervisning i "Det nye Gymnasium"

Vi vil ikke påbegynde en længere diskussion af ønsket om, at uddannelsessystemet er med til at udvikle en *demokratisk kompetence* hos befolkningen her. Når vi alligevel vælger at referere ovenstående passager fra gymnasiebekendtgørelsens ikke-fagspecifikke afsnit, er det fordi der er en pointe i at sammenholde disse tilkendegivelser med de efterfølgende fagspecifikke bemærkninger om matematik.

I afsnittet om læseplaner og eksamenskrav for matematik[16] [Ibid., pp. 45–47] foreslås det, at matematik genindføres som obligatorisk fag på den sproglige linje. Senere begrundes det direkte med studieforberedende hensyn, idet man har villet imødekomme universiteternes ønske om, at kunne optage sproglige studenter på medicin- og statsvidenskabs-studierne uden aflæggelse af tillægsprøve. Først sekundært nævnes hensynet til, at også disse studenter får "et indblik i matematisk-naturvidenskabelig tænkning og arbejdsmetode" [Ibid., p. 148]. For matematisk linje nævnes det eksplicit, at forslaget til læseplan for matematik er udformet med et dobbelt formål for øje: Dels skal eleverne gives "et fond af konkrete matematiske værktøjer", som de skal opøves i at anvende både i og uden for matematikken, dels skal de have mulighed for at "indleve sig i nogle karakteristiske sider af matematisk metode" [Ibid., p. 45]. I det konkrete forslag, der efterfølgende blev ordret indskrevet i selve bekendtgørelsen af 1961 (se [Pilemann 96, p. 258]), resulterer det i følgende formålsbeskrivelse [UVM 60, p. 58]:

> "Formålet med undervisningen er
> at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber og tankegange,
> at vække deres sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
> at søge deres fantasi og opfindsomhed udviklet,
> at øve dem i behandlingen af konkrete problemer, herunder udførelse af numeriske regninger, samt
> at gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder."

[16] Det faglige underudvalg, der havde matematik som område, bestod bla. af Mogens Pihl, Ole Rindung og Henning Højgaard Jensen, som også var med i "udvalget vedrørende den matematisk-naturvidenskabelige uddannelse", der var samarbejdspartner med den føromtalte teknikerkommission.

Afhængigt af hvilken betydning der lægges i ordet *fortrolig*, kunne sidste sætning godt læses som matematikundervisningens forsøg på at bidrage til, at eleverne rustes til at "tage kritisk stilling til offentlige anliggender og modstå propaganda ved at klargøre sig dens egentlige hensigter og sammenholde den med de faktiske forhold", jvf. citatet fra gymnasiebekendtgørelsens ikke-fagspecifikke afsnit. Det ville imidlertid stille krav til den anvendelsesorientering, der gives udtryk for i formålsbeskrivelsens sidste del. Den skulle være så ambitiøst tænkt, at den inkluderede træning af elevernes evne til *selvstændigt* at vurdere offentlige anliggender, også ved substantiel inddragelse af matematik, samt udfordrede dem til kritisk at vurdere sådanne matematikanvendelser ift. de faktiske forhold. Altså *elev*-aktiviteter, der er—eller er tæt på at være—matematisk modellering.

At det højst sandsynligt ikke er denne betydning, der ovenfor refereres til med snakken om at være "fortrolig med anvendelser af matematik", fremgår bla. af betænkningens kommentarer til udformningen af de skriftlige eksamensopgaver[17]. I det konkrete forslag til ordlyd, der igen blev ordret gengivet i den endelige bekendtgørelse af 1961, hedder det, at der lejlighedsvis bør stilles opgaver, som kan undersøge, om eleven har forståelse for matematikkens anvendelse inden for andre fagområder. Dette er tilføjet en bemærkning om, at "i disse opgavers tekst skal de nødvendige ikke-matematiske forudsætninger nøje præciseres" [UVM 60, pp. 116–17], hvilket vel rimeligvis må tolkes som, at tanken ikke er at udfordre eleven i grænselandet mellem matematikkens og virkelighedens verden, men kun at demonstrere anvendelserne.

Rimeligheden af denne fortolkning forstærkes ved igen at vende blikket mod betænkningens mere kommenterende afsnit om matematik, hvor det om den skriftlige eksamen hedder:

> "Endelig foreslås det udtrykkelig udtalt, at der ved eksamen kan stilles opgaver, der vedrører matematikkens anvendelse på andre fagområder. *Med en sådan bestemmelse mener man at fremme interessen for det islæt i undervisningen, der peger ud mod fagets anvendelser*" [UVM 60, p. 47] [vores kursivering].

I de almindelige bemærkninger om selve undervisningen nævnes det også, at der lejlighedsvis bør finde en behandling sted af opgaver og eksempler hentet fra andre fagområder. Det hedder bla. :"Dette *eksempelmateriale* bør være vaieret og *illustrere* anvendelser af de gennemgående afsnit af matematikken i den udstrækning det er muligt."[UVM 60, p.90] [vores kursivering].

[17]Der på baggrund af vores meget nære indblik i gymnasiehverdagen, ellers må betegnes som et af de steder, hvor man som myndighed har størst mulighed for at påvirke matematikundervisningen "ovenfra".

Endelig er det i denne sammenhæng væsentligt at påpege, at vi—på trods af de omtalte anvendelsesorienterede tiltag af både politisk og mere snævert undervisningsrelateret karakter—på intet tidspunkt i perioden før 61-bekendtgørelsen er stødt på aktiviteter eller bestemmelser, der kan fortolkes som et ønske om at udvikle en egentlig kompetence i at anvende matematikken *som en del af selve matematikundervisningen* på den matematisk-naturvidenskabelige gren. At dette ikke skyldes tilfældigheder, eller sjusk fra vores side, kan sandsynliggøres ved at se på indholdet af de skriftlige eksamensopgaver i den periode, vi hidtil har omtalt [Pilemann 96, pp. 78–79 og 115]. I perioden 1910–35 var der ialt kun 12 studentereksamensopgaver i matematik, der overhovedet kan betegnes som anvendelsesorienterede, selv i ordets mindst muligt krævende betydning (jvf. begrebsafklaringen side 35), mens det tilsvarende antal for perioden 1935–60 var blot 4 opgaver! Billedet synes tydeligt: Interessen for anvendelsesorientering har—både før og omkring bekendtgørelsen af 1961—udelukkende været i motiverende øjemed.

De interessante spørgsmål går nu i retning af *hvorfor* det var tilfældet: Hvorfor er 60'er-matematikken ikke karakteriseret ved en mere radikal anvendelsesorientering end tidligere, når det tilsyneladende var et væsentligt element i datidens generelle reform-ønsker? Er det tilfældigt, at matematik i citatet på side 68 ikke nævnes i rækken af fag, som eleverne i demokratiets navn *må* kende til? Blandt andet for at kunne svare på spørgsmål som disse, må vi nu igen tilbage i tiden, denne gang for at følge udviklingen i den *interne* fagopfattelse af matematik.

4.2 Den interne fagopfattelses påvirkninger

Det er karakteristisk for netop 60'er-matematikken, at den interne fagopfattelse spillede en central rolle for den læseplansmæssige udformning af gymnasiets matematikundervisning, blandt andet fordi der på daværende tidspunkt gennem længere tid havde været arbejdet med en nytænkning af matematikkens filosofiske grundlag, den såkaldte *strukturalisme*. Det er de centrale karakteristika ved denne nytænkning, og hvordan det satte sig spor i 60'er-matematikkens udformning, vi i dette afsnit vil forsøge at indkredse.

Som en måde at karakterisere den strukturalistiske matematikopfattelse på, vil vi skabe et sammenligningsgrundlag ved at omtale nogle alternative filosofiske traditioner. Disse traditioner repræsenterer efter vor opfattelse en form for programerklæringer analogt til politiske partiers programerklæringer. I forhold til den "almindelige" matematiker (til forskel fra det man kunne kalde den "politiske" matematiker) vil det således kun være naturligt, ikke at kunne tilslutte sig ét givent syn fuldstændigt.

4.2.1 Frem mod et strukturalistisk matematiksyn

Et af de områder, hvor strukturalismen er klart markeret, er ift. de såkaldt *ontologiske* spørgsmål, dvs. spørgsmål om hvilken status de objekter, matematikken beskæftiger sig med, har. For at have noget at holde strukturalismens standpunkt op imod, vil vi tage et ordentligt hop tilbage i tiden til omkring år 300 f.kr., hvor Euklid lagde grunden til det, vi i dag kalder klassisk plangeometri.

Euklid og troen på et intuitivt sandt grundlag for matematikken

I Euklids "Elementer" optræder fem aksiomer[18], her fra Thyra Eibes oversættelse fra 1897 [Eibe 97, p.1ff.]:

1. Man kan trække en ret linje fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst punkt.

2. Man kan forlænge en begrænset ret linje ud i ét.

3. Man kan tegne en cirkel med et hvilketsomhelst centrum og en hvilkensomhelst radius.

4. Alle rette vinkler er lige store.

5. Når en ret linje skærer to rette linjer, og de indvendige vinkler på samme side er mindre en to rette, så mødes de to linjer, når de forlænges ubegrænset, på den side, hvor de to vinkler ligger, der er mindre end to rette.

Der er mange måder at formulere Euklids femte aksiom på: John Playfair (1748-1819) havde følgende udlægning, der ofte anvendes idag (her oversat fra [Davis 81, p. 217]): "Givet en linje L og et punkt P i et plan, eksisterer der en og kun en linje parallel med L der går gennem P."

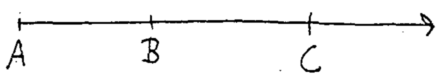
Gennem tiderne har forskellige matematikere forsøgt at bevise Euklids 5. aksiom ud fra de 4 øvrige. Det 5. aksiom havde nemlig ikke den intuitive karakter af selvindlysende sandhed, som de øvrige. I slutningen af det forrige århundrede forsøgtes det af flere forskellige at bevise det 5. aksiom ved at negere det, og søge at opnå en modstrid ("reducto in absurdum"). Der er overordnet set to oplagte muligheder for negeringen af det 5. aksiom: Enten kan der antages ikke at eksistere en linje gennem P parallel med L, eller der kan antages at være mere end én linje gennem P parallel med L.

[18] Forinden disse aksiomer præsenteres, har Euklid *defineret* en lang række begreber, fx. nr. (1) "Et punkt er det der ikke kan deles" og nr. (5) "En flade er det, som kun har længde og bredde".

Det lykkedes aldrig at bevise, at det 5. aksiom er en sætning deduceret fra de første 4 aksiomer. Til gengæld viste det sig—som en konsekvens af bestræbelserne—at det var muligt at opstille et konsistent aksiomatisk deduktivt system med negeringen af Euklids 5. aksiom som aksiom (hhv. den hyperbolske og sfæriske geometri). Opdagelsen beskrives i [Davis 81, p.330] som en katastrofe. I århundreder havde vi (matematikere) levet med "den Euklidiske myte", dvs. opfattelsen af, at ved at starte med selvindlysende sandheder og gå videre gennem stringente beviser, endes op med sikker, objektiv og eviggyldig viden om universets indretning.

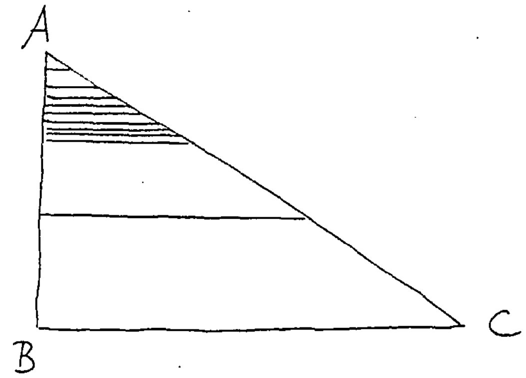
I den Euklidiske myte støtter man sig til geometrisk intuition, ligesom vi ofte gør i dagligdagen. Uendelighedsbegrebet kom til at spille en central rolle ifm. argumentationen for, at en sådan intuition ikke er brugbar som fælles grundlag for hele matematikkens opbygning.

Som et eksempel kan vi se på en af Euklids grundsætninger: "Det hele er større end en del af det". Denne tese—der i dagligdagen giver ganske god intuitiv mening—blev betvivlet allerede i middelalderen. I figur 4.5 indeholder linjestykket AB i henhold til den Euklidiske myte færre punkter end AC. Lars Mejlbo nævner i [Mejlbo 91], at allerede middelalderens skolastik indså



Figur 4.5 Er linjestykket AC større end linjestykket AB? Fra [Mejlbo 91, p.6].

tvivlsomheden af udsagnet. I figur 4.6 markerer de vandrette streger en sammenparring af punkterne på AB og punkterne på AC, hvorfor der må være lige mange. Analytisk udtrykt: Der eksisterer en bijektiv afbildning $f(x) = y$



Figur 4.6 Fra [Mejlbo 91, p.6]

mellem punkterne x på AB og y på AC, hvor y er bestemt ved:

$$\frac{x}{|AB|} = \frac{y}{|AC|} \Leftrightarrow y = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot x$$

En anden "katastrofe", der rokkede ved forestillingen om geometrisk intuition som fundament, var at man i analysen kunne fremvise kurver med de reelle tal som definitionsmængde, der var ingensteds kontinuerte:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{hvis } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Den intuitionistiske reaktion på grundlagskrisen

Der har i dette århundrede grundlæggende været to forskellige reaktioner på "det Euklidiske syndefald".

Den ene repræsenteres mest markant ved *intuitionismen*, der forbindes med L.E.J. Brouwer (1881-1966) og Arend Heyting (1898-1980). Intuitionismens program hævder, at matematikken er en konstruktion udført af den menneskelige bevidsthed. At en sætning udtrykker en matematisk sandhed betyder, at det er muligt at nå til den gennem en række simple og indlysende konstruktionstrin. Når disse skal stamme fra vores intuition, må forskellige principper fra den klassiske logik afvises, fx. det udelukkede tredjes princip om, at hvis p er et udsagn er p eller $\neg p$ sand. En sætnings falskhed er i intuitionistisk logik ensbetydende med, at det er muligt at bevise, at dens sandhed medfører en inkonsistens (selvmodsigelse). Fra de naturlige tal skal matematiske objekter konstrueres ved et endeligt antal skridt, hvilket fører til, at man ikke accepterer konstruktioner som de førnævnte, der tager afsæt i uendelighedsbegrebet. Matematik er ren tankevirksomhed, hvis begreber er mentale konstruktioner, og hvis almene gyldighed kan og skal henføres til den fælles-menneskelige intuition.

Forsøgene på at vise det umulige i Euklids ontologiske grundsyn baseret på intuition, er således ifølge intuitionismen ikke udtryk for et "syndefald", men for "syge" ikke-matematiske forestillinger, der ikke i praksis kan konstrueres, fordi de hviler på et begreb—uendelighed—uden for menneskelig rækkevidde.

Den formalistiske reaktion på grundlagskrisen

Den anden reaktion på "det Euklidiske syndefald" var at "sadle om", og forsøge at nytænke hele det fundament, matematiske påstande hviler på. Grund-

tanken her var—og er—at opfatte matematikken som en *formalisme*[19].

Udgangspunktet her var accept af, at det euklidiske program havde spillet fallit. Opfattelsen var, at påvisningen af tilfælde, hvor matematikken fremviste resultater i direkte modstrid med almindelig "sund fornuft", gjorde at "geometrisk intuition" som fundament måtte opgives, hvilket også var et farvel til det ontologiske grundsyn, at matematikkens genstandsfelt hviler på intuitivt sande forestillinger om verdens indretning. I stedet vendte man sig mod *aritmetikken* som fundament. Det skete på basis af Georg Cantors (1845–1918) mængdelære, som bla. havde nødvendiggjort begrebet "uendelige mængder" som en central del af matematikkens grundlag, ved at konstruere de reelle tal (som et lineært kontinuum) ud fra den uendelige mængde af hele tal. Selv de naturlige tal blev en sekundær struktur relativt til mængdelæren, da Frege viste, hvordan de naturlige tal kunne konstrueres fra ingenting (den tomme mængde $\emptyset$) ved at bruge operationer fra mængdelæren [Davis 81, p.331].

Det første og mest direkte forsøg på at bygge matematikken op på dette nye grundlag, var det *logicistiske* program, der især forbindes med Bertrand Russel og A.N. Whiteheads *Principia Mathematica.* Den bærende ide var at vise, at logik udgør grundlaget for al matematik. Arbejdet skulle så fremover bestå i at beskrive en matematik med dette grundlag så fuldstændigt som muligt. Programmet kom til at omfatte: (1) en definition af de matematiske begreber ud fra logiske begreber og begreber fra mængdelæren, og (2) matematikkens teoremer deduceres alene ud fra de logiske aksiomer og begreber. Denne måde at præsentere matematik på var, ifølge [Davis 81], dog ikke særlig tilgængelig:

> "The *Principia Mathematica* of Russell and Whitehead was the great attempt actually to carry out the formalization of mathematics. I has been accepted as the outstanding example of an unreadable masterpiece." [Davis 81, p.137f].

Som program anses logicismen i dag for at være opgivet, men mange af dens metoder og resultater står dog tilbage.

En anden markant enkeltperson, der med et formalistisk udgangspunkt påtog sig at forsvare matematikken mod det truende grundlagsmæssige "sammenbrud", var David Hilbert. Også for Hilbert var det, der gav anledning til det forrige århundredes "katastrofer", at basere aksiomerne på et intuitivt geometrisk grundlag. Teoremernes sandhed garanteres dels ved deduktionens logiske karakter og dels ved aksiomernes sandhed. Sandheden af aksiomerne

[19]Vi har bygget gennemgangen på [Winsløv 97, pp.2–6], [Skovsmose 80, pp.18–30], [Davis 81, p. 330–344] og [Skovsmose 90b, pp.39–55], der er opstillet efter stigende detaljeringsgrad. Den mest anbefalelsesværdige til lidt grundigere studier er sidstnævnte.

erkendes forud for og uafhængigt af teoriudviklingen. Aksiomernes sandhed erkendes umiddelbart på grund af deres selvindlysende karakter. Euklids fem aksiomer refererer bla. til "punkter" og "linjer", hvor fx. "et punkt" defineres lidt tåget som "det der ikke kan deles", men "geometrien handler netop om punkter og linier, så vil det ikke være en indlysende nødvendighed at disse begreber defineres?" [Skovsmose 90b, p.40].

For at styre uden om sådanne vanskeligheder fjernede Hilbert det begrebsmæssige indhold af aksiomerne; det eneste, der foretages, er navngivning. De genstande, der indgår i teorien, skal ikke præciseres eller tillægges nogen mening udover den, der fremgår af aksiomerne angående relationerne mellem genstandene. Og aksiomerne skal alene angive relationer, aldrig forsøge at definere genstandenes "væsen" [Skovsmose 90b, p.40ff]. Gennem at definere et formelt sprog, der kan udtale sig om matematiske påstande—dvs. gennem en omfattende formalisering—kan hele den matematiske struktur nu gøres til genstand for en "meta-matematisk" analyse mht. *konsistens, entydighed* og *fuldstændighed*, der ved endelige argumenter beviser, at en modstrid ikke kan opstå [Davis 81, p. 336].

Projektet lykkedes imidlertid ikke. Kurt Gödels (1906-1978) ufuldstændighedsteoremer fra 1931 viste nemlig, at (1) et aksiomatisk system, som omfatter de naturlige tal, enten er inkonsistent (dvs. man kan bevise en påstand såvel som dens negation), eller er for svagt til at enhver sand påstand om naturlige tal kan udledes fra aksiomerne[20]; (2) hvis et aksiomatisk system, som omfatter de naturlige tal, er konsistent, så kan dette ikke bevises indenfor systemet[21] [Winsløv 97, p. 4].

Selv om Hilberts oprindelige meta-matematiske projekt led skibbrud, gav det ikke anledning til opgivelsen af det formalistiske program. Som *metode* havde formalismen stadig et potentiale ift. afklaring af de *epistemologiske* grundspørgsmål om, hvad der karakteriserer matematisk sandhed og erkendelse. En matematisk sandhed giver ifølge formalismen kun mening, hvis en påstand kan vurderes i forhold til et formelt system; formaliseringen er en nødvendig forudsætning for filosofisk opklaring. I mængdelærens sprog kunne matematikken formaliseres aksiomatisk deduktivt. Når aksiomerne fritages for ontologisk indhold—og blot bliver byggesten hvorpå videre teoribygning sker ved at teoremer deduceres fra disse, i henhold til den sproglige syntaks—kan matematisk sandhed simpelt hen forklares som et teorem. Prisen er, som flere hævder, at formalismen gør matematikken til et (meningsløst) spil, der

[20]Alternativ formulering; hvis et formelt system af mindst samme udtrykskraft som elementær talteori er konsistent, indeholder det en uafgørbar sætning, dvs. en sætning som hverken kan bevises eller modbevises

[21]Alternativt: ...heraf følger, at hvis et sådant system er konsistent, kan dets konsistens ikke bevises i systemet selv.

ikke handler om noget. At et teorem er bevist, har kun sandhedsværdi relativt til systemet—matematikken er blevet til et sprogspil.

Strukturalismen

Strukturalismen, der først og fremmest tegnes af Nicolas Bourbaki[22], lod sig inspirere kraftigt af formalismens aksiomatisk deduktive fremstillingsform, men havde en anden dagsorden: Bourbaki havde analyseret et bredt spektrum af matematiske teorier, og fundet at visse relationer mellem de matematiske objekter går igen. Det centrale for Bourbaki var således *strukturerne*, ikke objekterne. I det lys er en matematik, hvis fremstilling er struktureret efter objekterne, som et kludetæppe.

Intuitionismen og logicismen er i direkte forstand ikke en realitet for den almindelige matematiker, og især ikke i gymnasieundervisningen. Det er formalismen incl. strukturalismen derimod, bla. fordi den som nævnt spillede en central rolle for 60'er-matematikkens udformning. Vi vil derfor samle karakteristikken af strukturalismen i følgende tre hovedområder:

Ontologi: Som en reaktion mod "katastroferne" skal matematikken løses fra ethvert intuitivt grundlag. Den skal—i modsætning til Euklids "punkter" og "linjer"—hvile på aksiomer, der er indholdsløse. Matematik handler dermed om strukturer, den har ikke selv noget indhold. Formlerne opfattes i fysisk forstand som tegn på papiret, og har altså *kun* syntaktisk indhold.

Epistemologi: Den aksiomatisk deduktive teoriudvikling, startende fra indholdsløse aksiomer, gør matematikken til en leg med symboler. "Spillereglerne" er givet i logikken og mængdelærens sprog (aksiomatisk system). Om et teorem er sandt eller falsk, kan kun afgøres i forhold til det aksiomatiske system. I sig selv er sætninger ren syntaks.

Hvad ville strukturalisterne: Formalismen i Hilberts udgave var blot et middel til at nå meta-matematikkens mål; at påvise konsistens og entydighed. I den strukturalistiske udgave af formalismen havde spørgsmål som disse ikke nogen afgørende betydning. Afgørende var, at man vha. den aksiomatisk deduktive metode ville reducere matematikken til kæder af tautologier. Strukturalismen hævdede således, at matematisk arbejde skal stræbe mod at *præsentere* de grundlæggende strukturer, som alle de matematiske teorier menes at bestå af.

[22]Et pseudonym for en gruppe af franske matematikere, der op gennem 30'erne jævnligt mødtes, oprindeligt for at skrive en lærebog i analyse, men senere satte sig for at omskrive hele matematikken ud fra det synspunkt, at matematik er den almene videnskab om abstrakte strukturer.

4.2.2 Den konkrete realisering

Vi omtalte i afsnit 4.1.2 helt kort det seminar, OEEC afholdte fra den 23. november til 4. december 1959 på slottet Royaumont i Frankrig. Ifølge forordet i den efterfølgende rapport [OECD 61], var der fra hvert land inviteret en "fremragende" matematiker, en matematikdidaktiker (mathematics educator) eller ministeriel person, og en "fremragende" matematiklærer. Fra Danmark passede disse adjektiver tilsyneladende på Ole Rindung, der udover professor Svend Bundgaard som gæstetaler, var eneste dansker til stede.

Marshall Stone indrager i sit indledende foredrag eksterne begrundelser for afholdelse af seminaret. Jens Høyrup beskriver da også i [Bollerslev 79, p.50f], at OEEC's økonomer og planlæggere langt hen ad vejen havde et ikke-internt formål: At den nyeste tænkning indenfor matematikken kunne bringes i anvendelser i det moderne samfund. Da de imidlertid ikke selv havde hverken matematisk eller pædagogisk ekspertice på området, financierede de istedet seminaret.

Som omstændighederne omkring seminaret fremstilles i [Bollerslev 79]—og som det iøvrigt fremgår af præsentationen af seminaret i selve rapporten [OECD 61]—tog matematikernes interne synspunkt dog over, og de pædagogiske diskussioner blev sekundære i forhold til den matematisk organiserede læseplansændring. Dette var helt bevidst:

> "The nature of mathematics—and the designing types of mathematics that are important—are rightfully the decisions of mathematicians. What portion of this mathematics can be taught below university level, to whom it can be taught, and the way it can be taught are then the decisions of educators, teachers and writers of textbooks." [OECD 61, p. 61].

I Stones foredrag slås den problemstilling fast, der kom til at præge konferencen: De nye strømninger i universitetsundervisningen[23] giver overgangsproblemer mellem gymnasier og universiteter. Alene med dette i bagtankerne mener han ikke, at introduktionen af den moderne matematik "af passende slags" i gymnasiet kan udsættes [OECD 61, p.16].

I det følgende kommer en længere beskrivelse af, hvad vi har fundet væsentligt fra den rapport, der blev udgivet efter seminaret. Den interne fagopfattelse af matematik, der lå bag den danske matematikundervisning, og—i hvert fald fra begyndelsen af 60'erne—prægede universitetsundervisningen, var stærkt præget af de tanker, der udfoldedes på seminaret. Disse tanker var igen præget af det formalistiske syn på matematik, som vi skal se. Vi får

[23] Han henviser til algebraens udvikling.

altså i seminaret nærmest "foræret" svaret på, hvordan de matematikfilosofiske bagtanker blev til konkret undervisningssyn i de danske gymnasier.

Indholdsdiskussionerne på Royaumont-seminaret

I seminarrapporten indledes andet kapitel, der har overskriften "Proposals for reform", med professor Jean Dieudonnés oplæg.[24]

Indledende forklarer han sin dagsorden, der er at undersøge (a) hvilken matematisk baggrund lærere på universiteterne ideelt set fordrer, (b) hvad de rent faktisk får, og (c) hvordan den situation kan forbedres. På universiteterne er matematikken præget af en ny tænkemåde. For at imødekomme en hastigt voksende analyse—ved at skabe sammenhæng og præcision—er mere abstrakte teorier som topologi og mængdealgebra nødvendige. Det ser ud til at være den eneste måde at holde rede på den evigt voksende viden, der til stadighed tilføjes den eksisterende. Men et sådant projekt tager tid, da det simpelt hen er svært at lære, og det skaber et pres på universiteternes første semestre. Da universitetsstudielængden dårligt kunne være længere, end den var på det tidspunkt, var det naturligt at vende sig mod gymnasiet. I gymnasiet var en række ting rent tidsspilde, hvilket var uhensigtsmæssigt, når universiteterne var underlagt tidspres—læseplanen i gymnasiet må reorganiseres. I det 19. århundrede, hævder han, blev overgangen fra klassisk geometri til algebra og analyse oplevet som et hop ind i en ny verden, og således oplever de nystartede studerende åbenbart den introducerende universitetsundervisning. Derfor skal de nye begreber og det nye sprog, der er introducereret indenfor de seneste 50 år [dvs. fra 1909-1959], indføres i gymnasiet. Klassisk geometri er 'offerlammet': "Euklid must go", som han fremhæver—rollen er nu udtjent ("it is thanks to the Greeks that we have been able to erect the towering structure of modern science."[OECD 61, p.35]). Han bruger herefter temmeligt mange ressourcer, og farverige formuleringer, på at argumentere for sit ændringsforslag, fx. vil han fjerne det meste af den klassiske geometri:

> "*Everything else* [end beskrivelsen af aksiomssystemet, en række specificerede brugbare konsekvenser og rimeligt interessante øvelser] which now fills volumes of 'elementary geometry'—and by

[24]Dieudonné regnes for en særdeles eksemplarisk repræsentant for Bourbarki. Inden præsentationen i rapporten nævnes det iøvrigt, at der var andre indlæg, men at kun Dieudonnés "...who represented an extremist point of view..." bliver præsenteret i rapporten. Begrundelsen er: "Although Prof. Dieudonné's plan of instruction...did not meet with general acceptance, the bold and imaginative thinking that characterise his design for better schooling in mathematics produced excellent results by provoking lively discussion and counter-proposals." [OECD 61, p.31]

> that I mean, for instance, *everything* about triangles (it is perfectly feasible and desirable to describe the whole theory without even *defining* a triangle!), almost everthing about inversion, systems of circles, conics, etc—has just as much relevance to what mathematicians (pure and applied) are doing today as magic squares or chess problems!"[OECD 61, p.35f].

Da de Euklidiske sætninger kan bevises indenfor vektorgeometrien fremhæver han desuden den fordel, at det gamle skænderi mellem klassisk og analytisk geometri i så tilfælde ville være meningsløst. Realiteten som han oplever det, står i kontrast hertil: Begreber som "punkt", "linje", "afstand" mfl. gives ingen aksiomatisk definition—de introduceres ved at appellere til intuitionen, selv om den præcise relation til de fysiske objekter, som de skal idealisere, aldrig rigtigt klargøres [OECD 61, p.31ff].

I resten af oplægget giver han nogle indholdsmæssige forslag til hvad der kan erstatte Euklid og bla. følgende vejledende princip[25]: Pseudobeviser, der ikke kan underlægges logisk analyse, og definitioner, der ikke rigtigt definerer noget, skal undgås (han tænker på Euklids elementer). Så hellere lade være. Når en logisk slutning introduceres i et matematisk spørgsmål, skal det altid præsenteres i fuld ærlighed, hvilket vil sige uden at gemme "huller" i argumentet. Han fortsætter:

> "For my own part, I see nothing wrong or dishonorable in starting with a premise which is not an axiom, but possibly some quite complicated statement, as soon as it is possible to show without any logical flaw that the given statement implies another one. Not only would this be much more instructive, it would also put in its true light the nature of logical inference and its *relative* character, which is often obscured by the manner in which it is hopelessly mixed up with the metaphysical notion of 'truth'."[OECD 61, p.40]

Resten af forelæsningen fortsætter med implementationsovervejelser under titlen "Outline of a modern curriculum". Vi vil fremhæve én ting fra dette, nemlig en mindre passage, hvor han kommer ind på det, Royaumont-seminaret egentlig skulle handle om, nemlig anvendelser. Han påpeger, at han i sin "outline" ikke er kommet ind på anvendt matematik:

> "Whether some [applied mathematics] should already be introduced in the secondary school is a question which it is outside my

[25]Baseret på egne og mere erfarne læreres fornemmelser, og det billede der tegnes i forskellige faglige artikler af gymnasieundervisningen i matematik [OECD 61, p.39].

> province and competence to tackle; but I think that if such a proposal were favorably considered, the theoretical foundations for teaching such questions would already be at hand." [OECD 61, p.45].

Det næste, der præsenteres i rapporten, er til gengæld anvendelsesorienteret. Under overskriften "Applications of Mathematics" summeres et foredrag af professor Albert W. Tucker [OECD 61, pp. 49–60], der på baggrund af to artikler gennemgår eksempler på, hvad det er ikke-matematikerne, hhv. beslutningstagerens (forretningsmandens) og samfundsvidenskabsmanden, har behov for af matematik. Indledningsvis advokerer han for, at beslutningstageren har behov for at *forstå* matematik—han behøver ikke nødvendigvis selv at kunne de fundamentale teknikker, som fx. at være skolet i at kunne løse ligninger og den slags selv. Tucker nævner herefter en række konkrete ønsker fra samfundsvidenskaberne i retning af matematisk indsigt—som de blev præsenteret i en rapport fra en komite om matematisk træning i de samfundsmæssige videnskaber. Disse er: at forstå statistik; at kunne læse samfundslitteratur, hvor der bruges matematik; at kunne kommunikere med matematikere og statistikere; at kunne formulere, arbejde med og analysere samfundsvidenskabelige problemer ved hjælp af matematik, dvs. at kunne formulere, arbejde med og analysere matematiske modeller; at kunne løse matematiske problemer, når de dukker op i samfundsvidenskaberne; at indse både fordele og begrænsninger af den matematiske metode, og kunne identificere problemer hvis løsning mest hensigtsmæssigt kræver konsultation hos en matematiker eller statistiker; at forstå naturen af de matematiske begreber og matematiske ræssonementer; at overkomme de personlige psykologiske forhindringer i forhold til brugen af matematik.

Professor Tucker giver derpå en "outline" af forskellige kurser til samfundsvidenskabsmanden. Med ca. 80 timers undervisning til rådighed kunne det—helt tidstypisk—se ud som følger [OECD 61, p.54]:

- Logik og mængdelære—10 timer.
- Relationer, incl. ordningsrelationer—10 timer.
- Aksiomatiske systemer og matematiske modellers natur—10 timer.
- Elementære funktioner—15 timer.
- Introduktion til analyse—35 timer.

Dette program kan der evt. bygges videre på: 30 timer mere analyse, 30 timers sandsynlighedsregning og 20 timers matrix-regning.

Det tredje kapitel præsenterer indlæg, der vedrører hvilken retning, reformen skal tage. Der blev taget hensyn til hvordan matematikundervisningen relateredes til andre uddannelser og til videre matematikstudier. Der var følgende 3 mål med undervisningen som udgangspunkt:

1. Matematik som "liberal education" (freedom of the mind).
2. Matematik som basis for daglig- og arbejdslivet (matematik som folkets værktøj).
3. Matematik som grundlag for videre universitetsstudier.

Det store spørgsmål for diskussionen var nu: Vil matematikundervisningen reformeret efter de bærende strukturelle egenskaber honorere disse mål, eller skal der følges en anden vej? En lang række indlæg opsummeres herefter—indlæg, der udelukkende drejer sig om, hvordan strukturalistisk matematikundervisning kan foretages, og således implicit forudsætter, at svaret på det egentlige spørgsmål er så oplagt, at det ikke behøver nævnes. Eksempelvis handler det første indlæg af professor Gustave Choquet primært om, hvordan mængden af hele tal **Z** er beriget med flere strukturer som fx. "ordning", "grupper" eller "ringe" etc. Han fremhæver, at hvis intet antages om **Z** undtagen dets algebraiske struktur (defineret ved addition og multiplikation) har vi der en fremragende eksempel på en struktur, indenfor hvilken hovedbegreberne indenfor algebra kan studeres (identiteter, polynomier etc.). Hvis alle dets strukturer tages i betragtning kan vi opnå rent aritmetiske egenskaber som delelighed, primtal etc. [OECD 61, p.64].

I det fjerde kapitel behandles implementationsproblemer. At få skrevet nogle gode og spændende lærebøger fremhæves som noget helt centralt.

I seminar-rapportens konkluderende kapitel fremhæves, at selv om seminarets fokus var på de universitetsegnede studerende var der i bestræbelserne inkluderet en reform af matematikundervisningen i henhold til de daværende behov i samfundet. Således fremgår det, at undervisningen i gymnasiet ikke rettes direkte mod at producere fremtidige matematikere. Brug og anvendelse af matematik i samfundets mange facetter er de principielle faktorer i "den ny matematik". Herefter gengives de overordnede krav om intensiveringen af gymnasieundervisningen nærmest uændret som vi præsenterede Dieudonné's indlæg: løsning af universitetets studieforudsætninger, indførelsen af matematikkens nye program, hvor forskellen på algebra og geometri langsomt forsvinder (strukturalismen), klassisk geometri skal gennemgås i folkeskolen, i gymnasiet skal Euklid erstattes af et program, hvor deduktiv geometri behandles ved brug af vektorer eller reelle tal, og senere sammenføjes med algebra gennem studiet af matricer, determinanter, grafer, komplekse tal og polære koordinater. Trigonometri skal ud som selvstændig disciplin (det inddrages naturligt i det øvrige). Sikkert fordi Dieudonné ikke selv mente at være kompetent til at udtale sig om det anvendelsesorienterede, afsluttes opremsningen af hans liste med 5 linjer om anvendelsesorientering:

> "For most of our pupils, mathematics provides tools for scientific and technical work. This is well understood as far as the physical sciences and engineering are concerned. Today, however, in addition to these fields of endeavour, the needs of the social sciences, business and industry must also be recognized." [OECD 61, p.107].

Herefter kan "The case for reform in the secondary-school programme..." opsummeres i fem punkter: (a) nye emner som mængdealgebra, vektorrum, mængdelære etc. (b) nye opgaver om anvendelser indenfor sandsynlighedsregning og teoretisk statistik, liniær programmering etc. (c) udvikling af nye standarder for præcision og klarhed og vægt på matematiske strukturer (d) den hastige udvikling af de forskellige dele af matematikken kræver mere efficiente- og mere generelle metoder (e) forandringerne i de kulturelle, industrielle og økonomiske mønstre gør, at flere (og lægmand) må trænes i videnskabelig viden, og at kende matematik er i den henseende fundamentalt.

4.2.3 Indførelsen af den ny matematik i Danmark

Den "Nordiske Kommittén för Modernisering av Matematikundervisningen", der bestod af 4 personer fra hvert af landende Danmark, Finland, Norge og Sverige, udpeget af Nordisk Kulturkommision, kom til at fungere som igangsætter og inspirator for matematikreformerne i de nordiske lande. De danske medlemmer i komiteen var Agnete Bundgaard, Bent Christiansen, Erik Kristensen og Ole Rindung [Skovsmose 80, p. 35ff].

Hovedsigtet i Danmark blev (i realiteten identisk med det der fremlagdes på Royuamont-seminaret):

> "...at udnytte den ventede opprioritering og opblomstring af naturvidenskab, matematik og teknik uddannelsessystemet til at bringe matematikundervisningen á jour med den moderne universitære matematiks indhold og form. ... at lade matematikken opbygge ved hjælp af begreber som mængde, afbildning, relation, komposition, og i analysen omegn, som byggesten overalt i stoffet." [Branner-Jørgensen 81, p.198f].

På den matematisk-fysiske gren var pensum:

1. Almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra.
2. Hele, rationale, reelle og komplekse tal.
3. Kombinatorik.
4. Ligninger og uligheder.
5. Plangeometri.
6. Rumgeometri.
7. Elementære funktioner.
8. Infinitisimalregning.
9. Anvendelser af infinitisimalregningen.
10. Valgfrit emne.

Den samfunds- og naturfaglige gren havde følgende pensum:

1. Almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra.
2. Hele, rationale, reelle og komplekse tal.
3. Ligninger og uligheder.
4. Elementære funktioner.
5. Infinitisimalregning.
6. Anvendelser af infinitisimalregningen.
7. Rentesregning.
8. Kombinatorik, sandsynlighedsregning og statistik.

Ét dominerende lærebogssystem

Lærebogssystemet Matematik 1/2/3 af Ole Rindung og Erik Kristensen spillede en helt central rolle i de mere pragmatiske aspekter mht. implementeringen af reformen (de blev indtil midten af 70'erne anvendt af ca. 90 % af klasserne). Det nævnes af flere kilder, at de i høj grad var bestemmende for, hvordan undervisningen efter reformen tog sig ud i Danmark. [Branner-Jørgensen 81, p.201], [Skovsmose 80, p. 37] og [Bollerslev 79, p. 103].

I forordet står der bla.:

> "Den nye læseplan, der træder i kraft i august 1963, giver anvisning på en ret væsentlig omlægning af matematikundervisningen. [...] I denne situation har vi fundet det hensigsmæssigt at gøre fremstillingen i bind I af vort lærebogssystem meget udførlig og rig på eksempler. Den større bredde, som bogen derved får, skulle efter vort skøn gøre den lettere at arbejde med i en undervisning, der ikke har en grundfæstet tradition at bygge på." [Kristensen 62, p. IX].

Bogen er opdelt i følgende kapitler: Mængder og udsagn; Talmængder; Vektorer; Den rette linies analytiske fremstilling; Afbildninger; Reelle funktioner; Ligninger og uligheder; Ækvivalensrelationer; Induktion; Hele tal; Algebra; Praktiske anvendelser af logaritmefunktioner; Trigonometriske funktioner; Geometriske anvendelser af trigonometriske funktioner. Bogen er på 334 sider, hvilket forfatterne i forordet antydningsvis påpeger er lidt i overkanten, men de mener alligevel, at bogen kan nås igennem i løbet af det første gymnasieår!

4.3 Sammenfatning

Samfundets udviklingstræk: Efter Anden Verdenskrig var de vestlige lande i kraftig økonomisk medvind. I Danmark gav efterkrigstiden samtidig anledning til, at samfundets fremtidige indretning blev diskuteret. I perioden kan der i høj grad tales om et teknologioptimistisk syn. For at følge med de øvrige vesteuropæiske landes økonomiske udvikling, var der behov for omfattende teknologiske investeringer i både landbrug og industri. Der var bred politisk konsensus om at bidrage til denne udvikling, men det er et iøjefaldende træk, at den især blev socialdemokratisk politik. Ideen var, at de øgede statslige indtægter af et teknologisk moderne og konkurrencedygtigt erhvervsliv via omfordeling kunne skabe det økonomiske grundlag for en lang række tiltag, der skulle forbedre livsvilkårene for den enkelte borger.

Det eksterne matematiksyn: Med under 10% i gymnasiet, og langt færre videregående uddannelsesinstitutioner end idag, var der ét væsentligt problem: Manglen på teknisk kvalificeret arbejdskraft på alle niveauer. Teknikerkommissionen efterspurgte en betydelig styrkelse af gymnasiekapaciteten, idet det dels bemærkes, at de gymnasiale uddannelser er forudsætningen for uddannelse af de højst uddannede teknikere, og dels bemærkes, at det ikke er manglen på "...begavede unge mennesker", der hindrer forøgelsen af tilgangen, men en kvantitativ og kvalitativ udbygning af skolesystemet [SM 59, p. 24ff].

De ulemper, der kan være ved, at en stor andel af befolkningen er uddannet indenfor det naturvidenskabelige område, og ser omverdenen ud fra snævert faglige synspunkter, skal imødegås gennem undervisningen indenfor de øvrige fag, primært de humanistiske og samfundsvidenskabelige.

Billedet tegner sig egentligt ret klart: I forhold til de 3 grundlæggende årsager, vi skitserede i kapitel 3, er den *økonomisk/tekniske årsag* tydeligt opprioriteret i samfundets eksterne syn.

Den interne fagopfattelse af matematik: Matematikundervisningen i gymnasiet skulle bringes i overensstemmelse med det moderne matematiksyn, der var fremkommet de foregående 50 år, og som indtil starten af 60'erne kun forefandtes på universiteterne. Set udelukkende fra et studieforberende synspunkt, var 60'er-reformens to vigtigste formål dels at mindske det "kulturchok", de førsteårsstuderende blev udsat for ved studiestarten, og dels at give studenterne en matematikundervisning, der var tidssvarende, dvs. en undervisning, der gav et billede af matematikken, som den opfattes i henhold til *det strukturalistiske program*.

De skitserede synspunkter hører ind under den politisk/kulturelle årsag og som vi har skitseret var det sådanne synspunkter der reelt lå bag matematikundervisningens praksis.

Fagopfattelsen af matematik: Det står klart, at fagopfattelsen af matematik er "spændt ud" mellem den økonomisk/tekniske årsag og den politisk/kulturelle årsag. I bekendtgørelsen udtrykkes primært sidstnævnte. At denne disharmoni ikke stod mere klart i 1960'erne, skyldes givetvis tre forhold.

For det første var den økonomisk/tekniske årsag til matematikundervisningen ikke direkte forbundet med gymnasieundervisningen. Her skulle grundlaget lægges til videre studier, der meget mere direkte honorerede den økonomisk/tekniske årsag—dette syn er fx. helt fremherskende i teknikerrapporten.

For det andet var det en udbredt opfattelse, at matematikundervisningen havde formaldannende egenskaber i retning af "at vække deres sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform, [og] at søge deres fantasi og opfindsomhed udviklet,..." [UVM 60, p. 58].

Personlige egenskaber af denne karakter må anses for særdeles essentielle for en videre uddannelse med vægt på stringens og bevisførelse, hvorfor sådanne formål legitimeres af en strukturalistisk præget matematikuddannelse.

For det tredje var den sidstnævnte formålsspecifikation—"at gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder" [UVM 60, p. 58]—ret direkte udtryk for den økonomisk/tekniske årsag. Formuleringen er imidlertid temmelig ukonkret, og blev som vi beskrev tidligere i realiteten ikke tillagt ret stor vægt, hverken i lærebøger eller eksamensopgaver.

Selv om man således godt kan *forstå*, hvordan to så forskellige syn på matematik kan eksister samtidigt, er det imidlertid et faktum, at undervisningens *realitet* var domineret af den politisk/kulturelle årsag.

Den individorienterede årsag er i et vist omfang repræsenteret i den ovennævnte anvendelsesorienterede formålsspecifikation, men må overordnet betragtet siges at være fraværende i både det eksterne og interne syn.

Kapitel 5

Matematikundervisningen idag

Udviklingen af samfundsforholdene og matematikundervisningen frem til idag, er på mange måder mindre spektakulær end perioden frem til 1960'erne. I forhold til situationen i gymnasiet, har de matematikfilosofiske diskussioner, der har været, ikke radikalt ændret undervisningen. Og samfundets indretning kan ift. de planlagte omstruktureringer efter Anden Verdenskrig nærmest siges at have udviklet sig "inkrementalistisk"[1]: samfundets udvikling er fortsat ad de skinner, der lagdes i 1950'erne.

Alligevel har der været en ret markant udvikling af samfundet, og dermed af det enkelte individs hverdag. Omlægningen af gymnasiets struktur og matematikundervisningen med bekendtgørelsen af 1987, kan forstås som et resultat af denne udvikling, som endnu engang understreger sammenhængen mellem samfundets udvikling og (matematik-)undervisningens udvikling. Pensumindholdet og formålet for matematikundervisningen skiftede ret markant, og så fik vi de tre aspekter.

Som vi skitserede ret indgående i kapitel 1, er det vores indtryk, at der er reel anledning til en vis opmærksomhed omkring undervisningens tilrettelæggelse. Den store udfordring består efter vores opfattelse i at give mening til bekendtgørelsens vendinger såsom: "...indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger...", eller "Med samfundets stigende anvendelse af matematik, ikke kun i teknik og produktion, men også som baggrund for prognoser, planlægning, beslutningstagen og styring, er det derfor af almen betydning, at eleverne igennem undervisningen både bliver i stand til selv at udnytte matematiske betragtningsmåder og til at vurdere anvendelser af matematik, som de møder i deres hverdag" og "...at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse

[1]Et udtryk lånt fra budgetlægningsteori: Ved ikke at tage fx. udgiftposter op til grundlæggende revision, men udelukkende at fokusere på ændringerne ift. tidligere år, kan budgetteringspraksissen karakteriseres som *inkrementalistisk*.

problemer inden for forskellige fagområder." [UVM 97a] og [UVM 97b].

Det er vores intention her i kapitlet at udfolde denne "mening". Vi starter naturligt nok med at se på afrundingen af det matematiksyn, vi skitserede i forrige kapitel.

5.1 Matematikundervisningens formål og indhold frem til idag

5.1.1 Afslutningen af 60'er-matematikken

Der er et eller andet, man som matematiker ikke kan undgå at holde af ved Bourbakigruppens projekt. Aldrig før har faget konstitueret sig selv på så eksplicit og gennemgribende en måde. Det er let at leve sig ind i den optimisme og det engagement, der lå bag Bourbaki-gruppens arbejde. Det er let at forstå, hvorfor det var så oplagt at koble en strukturelt konsistent og gennemtænkt nyskrivning af de så svært erkendelige matematiske begreber, med et øget samfundsmæssigt behov for bredere og dybere teknisk-matematiske kompetencer i videreudbygningen af velfærdsstaten.

Undervisningsprojektet lykkedes ikke: Det blev efterhånden klart, at studiet af de abstrakte og generelle begreber og strukturer blev til *mål i sig selv*, i stedet for—som tiltænkt—at være midler til højere mål. Erkendelsen af dette forhold kom ikke samtidigt i de forskellige vestlige lande, der havde 60'er-matematikken på programmet. Det var afhængigt af, i hvor "ren" en form reformen blev gennemført, dvs. hvor tidligt efter Royaumont-seminaret, ideen adapteredes [Niss 87, p.490].

Fokuseringen på studiet af de abstrakte strukturer havde i den elementære matematikundervisning ført til, at eleverne ikke længere kunne regne—hvilket, især i USA, medførte modreaktionen: "back to basics" bevægelsen, hvor de tidligere forsømte regnefærdigheder blev det essentielle. Allerede i starten af 1980'erne var denne bevægelse dog ved at ebbe ud. Værre var det, at eleverne ikke kunne bringe matematikken i anvendelse, at matematikken opfattedes som et spil, frakoblet virkeligheden—et lukket spil [Niss 87, p. 490].

Helt centralt i forståelsen af problemstillingens *omfang* er de sociologiske faktorer, herunder uddannelseseksplosionen, jvf. figur 4.1 side 53: Sammenfaldende med indførelsen af 60'er-matematikken steg andelen af befolkningen, der modtog matematikundervisning på gymnasialt niveau, meget voldsomt, fra 10% i 1960 til 32 % i 1976 [UVM 78b]. Flere og flere blev matematiske studenter uden i direkte forstand at have fremtidige matematiktunge studier som sigtet. Dermed var matematikundervisningen i gymnasiet for flere og flere den sidst modtagne undervisning i matematik, og "belønningen" for anstregelserne kunne derfor ikke længere udskydes til fremtidige studier. Dette, sammenholdt med en ændret attitude i form af mindre autoritetstro og søgen efter mening og relevans med studierne, var medvirkende til at spille den ny matematik fallit.

Allerede i løbet af tresserne blev det klart, at der måtte justeres i bekendtgørelsen. Der var problemer med at nå pensum, og i 1964 kundgjorde et cirkulære derfor, at en række punkter fra emnelisten udgik, bla. det valgfrie emne på den matematisk-fysiske linje [Pilemann 96, p. 136]. Da femdagesskoleugen skulle indføres i 1971, benyttede man lejligheden til at udarbejde en ny bekendtgørelse. Denne bestod primært i en beskæring af pensum ift. 1961-bekendtgørelsen, idet komplekse tal forsvandt og algebraen blev kraftigt beskåret.

Det fagudvalg, der blev nedsat til at revidere bekendtgørelsen, havde elevrepræsentation, og Henrik Meyer (fagkonsulent fra 1971-1978) bemærker i [Bollerslev 79, p. 104], at dette bla. afspejledes i en væsentlig ændring af formålsparagraffen: Hvor eleverne i henhold til 1961-bekendtgørelsen skulle gøres "fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder", skulle eleverne i henhold til 1971-bekendtgørelsen opnå en "forståelse af og evne til *kritisk* at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder". Matematikundervisningens formål kom derved—med 10 års forsinkelse—i større harmoni med de perspektiver i retning af at udvikle interessen for samfundsproblemer og evnen til kritisk og selvstændigt at bedømme problemerne, som vi på side 68 omtalte var generelt gældende for den gymnasiale undervisning i henhold til 1961-bekendtgørelsen. Det er naturligvis en helt anden sag, om undervisningen faktisk levede op til dette mål.

Ændringen af formålet blev fulgt op med følgende forslag til undervisningens indhold i 1.g, her gengivet efter [Pilemann 96]:

> "Teoretiske matematiske strukturer kan opbygges på grundlag af velformulerede problemer. Undervisningen kan omfatte problemstillinger fra økonomi, biologi, fysik, sociologi, teknik, databehandling, informationsteknologi, psykologi, sprog, kemi mm.."

Denne ændring gik dog sandsynligvis hen over hovedet på de elever, der var i gymnasierne i 1970'erne. De lærebøger, der anvendtes i 1970'erne, inddrog udelukkende problemstillinger fra andre fagområder for at *illustrere* anvendelsesmulighederne af den strukturelt ordnede matematik.

I 1972 vandt en gruppe matematikere fra Århus Universitet en konkurrence udskrevet af Georg Mohr fonden om at skrive bøger, der kunne demonstrere matematikkens anvendelsesmuligheder. Som et tidstypisk eksempel på

anvendelsesorienteringen, kan vi betragte eksempel 1.10 fra bogen med den lovende titel: “Matematiks anvendelse i samfundsfag”—se figur 5.1. I bogen

1.10. Eksempel

Lad os til slut se på et eksempel, hvor en person skal dømme egenskaber ved en række personer, for eksempel en dommer i en skønhedskonkurrence.

Her ønsker vi både at måle, at "x foretrækkes for y", hvilket vi betegner $y \lesssim x$, og at "forskellen mellem x og y ikke er større end forskellen mellem z og w". Vi lader (x,y) betegne forskellen mellem x og y, og hele den ovenstående sætning skriver vi

$$(x,y) \lesssim (z,w)$$

Følgende krav til vort mål n vil i denne situation være rimelige

1) $n(x) \leqq n(y) \Leftrightarrow x \lesssim y$
2) $n(y) - n(x) \leqq n(w) - n(z) \Leftrightarrow (x,y) \lesssim (z,w)$

Vi bruger n som betegnelse for dette mål, fordi det ofte kaldes en nyttefunktion.

Vore krav til n udtrykker en ordning af kandidaterne samt en ordning af forskelle mellem dem.

Figur 5.1 Eksempel 1.10 fra 1. kapitel “Mål”, i [Dohrn 1975, p. 20].

behandles udelukkende problemstillinger, der er relevante ift. strukturel matematik, hvorfor det fx. florerer med opgaver som den fremhævede.

5.1.2 Relevanskrise i matematikundervisningen

I 1979 konstaterer Henrik Meyer følgende i [Bollerslev 79, p.104]:

> “Bekendtgørelsen og vejledningen siger på alle grene, at eleverne skal præsenteres for anvendelser af matematikken inden for andre fagområder. Man må nu erkende, at bortset fra anvendelser i fysik står det gennemgående sløjt til på dette punkt.”

Anvendelsesorienteringen virkede altså ikke efter hensigten. Allerede i 1977 giver Mogens Niss en meget rammende generel kritik af den danske matematikundervisning—en kritik, der overordnet set rammer 60’er-matematikken:

> "One of the striking points in this instruction is that reality—represented by examples—serves to illustrate mathematics. [...] The relevance of mathematics is neither subject to nor expressed in the instruction but is supposed to be established beforehand and outside the instruction itself." [Niss 77, p. 305]

Niss taler efterfølgende om en *relevanskrise* i matematikundervisningen. Undervisningen i matematik virker uvedkommende, virkelighedsfjern og dermed irrelevant. Denne relevanskrise tager Ole Skovsmose for folkeskoleområdets vedkommende op til revision i [Skovsmose 80]. Her tales om, at 60'er-matematikkens undervisningsprojekt med hensyn til fremstillingsform kan karakteriseres som "en *strukturel projektion*", der

> "...betyder, at organisationsprincippet for undervisningsstoffet kun er kendt af de *få*. Når det er overordnede strukturer, der projiceres ind i undervisningssfæren og søges konkretiseret på forskellige niveauer, kommer disse til at danne sammenhængen i undervisningen. Det er en indsigt i disse strukturer, der giver en forståelse af og en forklaring på, hvad der foregår. Det er strukturerne, der skaber mening i undervisningen, og f.eks. ikke de mange små eksempler, der er knyttet til de enkelte delbegreber." [Skovsmose 80, p.39f]

Selv om dette er møntet især på folkeskolen, gælder det også gymnasieundervisningen, mest udtalt på den naturfaglige og samfundsfaglige linje, idet man heller ikke her kommer tilstrækkeligt langt "langs det strukturelle gelænder" til at man kan danne en fornuftig og relevant mening.

5.1.3 Den nuværende gymnasiematematik tager form

På landsmødet i matematik i 1981, arrangeret af Dansk Matematisk Forening, tegnes generelt det samme billede. Op til landsmødet var der allerede ved årskiftet 1979/80 nedsat 5 udvalg med hver deres kommissiorium dækkende såvel matematik som matematikundervisning på alle niveauer. Det var meningen, at disse udvalg skulle gå grundigt til værks, hvorfor man enedes om et forholdsvis langvarigt udvalgsarbejde. Ideen var at give et helhedsbillede af matematikken i Danmark [Branner-Jørgensen 81, p. 1]. Udvalg III beskæftigede sig med gymnasiets matematikundervisning. Det var bredt sammensat med 13 fremtrædende repræsentanter fra den danske universitets- og gymnasieverden[2], og havde et bredt favnende kommissorium: "...en oversigt over

[2]Bla.: Mogens Niss (formand), Vagn Lundsgaard Hansen, Helge Gram Christensen, Bent Hirsberg, Ib Axelsen (fagkonsulent), Torben Christoffersen, Lise Høj (fagkonsulent), Kirsten Hermann.

matematikundervisningens nuværende og tidligere indhold i gymnasiet (herunder HF), samt over de til grund liggende ideer" (efterfulgt af en lang række undervisningsrelaterede underpunkter). Igen betones det, at der ikke er nok anvendelsesorientering i gymnasiets matematikundervisning. De skriver bla.:

> "Samtidig hermed [at de tanker der lå bag den ny matematik ikke kunne realiseres] har der været et voksende ønske om at flytte vægten i undervisningen, således at man øger elevernes intuitive forståelse og deres opfattelse af matematik som et fag, der anvendes inden for mange områder." [Branner-Jørgensen 81, p. 178f]

Dette "voksende ønske" er anledningen til udvalgets formulering af fire ønsker til en ændret matematikundervisning. Undervisningen skal efter udvalgets opfattelse bibringe eleverne indsigt i:

1. matematikkens specielle natur, som bl.a. kommer til udtryk ved den proces, der består i intuitiv forståelse af en sammenhæng, formulering af en sætning og bevis for denne,

2. nogle matematiske emner, der er centrale derved, at de indgår i mange forskellige anvendelser, samt eksempler på sådanne anvendelser,

3. nogle autentiske anvendelser af matematik, der behandles, fordi anvendelsesområdet er af væsentlig, samfundsmæssig betydning,

4. dele af matematikkens historie og matematik i kulturel, filosofisk, historisk og samfundsmæssig sammenhæng. [Branner-Jørgensen 81, p.179]

Udvalget tager ikke nærmere stilling til, hvordan disse ønsker konkret kunne udmøntes i en læseplan, men påpeger, at det kan lade sig gøre både i den daværende strukturelt opdelte gymnasiematematik og fremtidige struktureringer.

Tre år senere, i 1984, kommer en bekendtgørelse, der på mange måder blot er en justering af 1971-bekendtgørelsen, fx. er formålet uændret. I pensumlisten er ækvivalensrelationer fjernet, og et punkt om regnetekniske hjælpemidler er indført—regnestokken er i perioden afløst af lommeregneren. Samtidigt kommer imidlertid også muligheden for at tilrettelægge undervisningen efter den såkaldte forsøgsbekendtgørelse. Den bygger i høj grad på de ideer, som Branner-Jørgensen udvalget præsenterede, og den gøres med visse ændringer til bekendtgørelsen fra 1987, der—med tilføjelsen af det to-årige forløb til A-niveau som eneste senere tilføjelse—stadig er den gældende, jvf. omtalen side 13ff..

Såvidt gymnasiets formål og indhold fra den mere "faktuelle" side fra bekendtgørelsen anno 1961 og frem. Vi vil nu, på baggrund af denne gennemgang, fra forskellige vinkler karakterisere det moderne samfunds krav til og samspil med matematikundervisningen i gymnasiet, som nævnt med det formål at "gå bag om" intentionerne i den gældende bekendtgørelse.

5.2 Studieforberedelse og almendannelse

Gymnasiets rolle i samfundet har historisk set balanceret mellem den studieforberedende og den almendannende rolle. Det studieforberedende aspekt af den gymnasiale uddannelse er en naturlig del af gymnasiets placering i uddannelseshierakiet. Der *er*—i modsætning til, hvad man umiddelbart kunne fristes til at postulere—sket ændringer i denne rolle ift. situationen i 1960'erne. Det væsentligste er efter vores opfattelse, at den gymnasiale matematikuddannelse indgår som grundlag for en langt mere varieret vifte af videregående uddannelser, hvilket vi vil diskutere senere.

Tidligere var sondringen mellem det almendannende og det studieforberedende lidt uklar for matematikundervisningens vedkommende, hvor man som vi beskrev i kapitel 4 nærmest antog, at det almendannende ville følge mere eller mindre automatisk i kølvandet på de isolerede faglige (studieforberedende) studier. I dag er situationen en anden; der er i stigende grad fokus på at få ekspliciteret, hvilket udbytte matematikundervisningen udover matematisk indsigt kan give de studerende. Begrundelsesdiskussionerne, der især i didaktiker-kredse siden 70'erne er tiltaget, virker som en sandsynlig forklaring på dette øgede fokus. At begrundelsesdiskussionerne er tiltaget, kan ses som et symptom på, at samfundet har undergået forandringer af betydning for matematikundervisningen.

Det almendannende aspekt af matematikundervisningen indebærer idag, i væsentlig højere grad end tidligere, at forstå og kunne forholde sig til væsentlige demokratiske problemstillinger i samfundet—en sådan fortolkning foretages fx. i [SHF 89a, p. 2]. Den ændrede fortolkning hænger efter vores opfattelse sammen med, at de samfundsmæssige ændringer, der har fundet sted, primært har indebåret, at *kompleksiteten* af samfundet er forøget ganske væsentligt siden 1960'erne.

Vi vil forfølge denne opfattelse nu, for herigennem at argumentere for følgende konklusion: Vi mener den væsentligste ændring af *fagopfattelsen* af matematik og matematikundervisning fra 1960'erne til idag kort kan karakteriseres ved, at en væsentlig årsag til at gennemføre matematikundervisning på gymnasialt niveau er et ønske om at medvirke til at udvikle elevernes *demokratiske kompetence*.

5.2.1 Matematikundervisningsdiskussioner

I perioden fra 1987 til 1991 afholdt "Initiativet vedrørende Matematikundervisning" under Statens Humanistiske Forskningsråd fem konferencer: "Matematikundervisning i dens betydning for en demokratisk enhedskultur under højteknologien" [SHF 88], "Gymnasiets matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav og demokratikrav" [SHF 89a], "Nye krav til matematikkundskaber" [SHF 89b], "Matematikundervisning og demokrati" [SHF 90], "Matematikundervisning og demokrati (II)" [SHF 92]. Konferencerne har—som titlerne indikerer—alle grænsefladen mellem samfundet og matematikundervisningen på dagsordenen, og de behandler et bredt spektrum af problemstillinger, der er relevante for såvel folkeskolen som gymnasiet.

Nogle af hovedtemaerne på konferencerne var læreruddannelser, demokratiopfattelser, matematiske modeller, studieforberedelse og rekrutteringsproblemer, matematikkens didaktik, samspil mellem undervisningen praksis og undervisningens formål etc.[3] Blandt de mange indlæg vil vi primært koncentrere os om dem, der vedrører gymnasiet, hvilket indbefatter problemstillingerne knyttet til "demokratisk kompetence" og studieforberedelse i direkte forstand.

Almendannelse—demokratiforberedelse

Det meget klare budskab fra disse konferencer set under ét er, at samfundet idag i meget omfattende grad betjener sig af matematik, og at dette bør have undervisningsmæssige konsekvenser. Disse konsekvenser går i retning af, at studenterne skal kunne forholde sig til og selv gøre nytte af anvendelser af matematik i ikke-matematiske problemstillinger, som de mødes i erhvervslivet, i videre studier, i dagligdagen, i det demokratiske liv etc.

Også blandt professionelle brugere af matematik diskuteres det, i hvilket omfang matematikkens anvendelser misbruges, fx. som grundlag for beslutningsprocesser. Planlægningsgruppen bag konferencen [SHF 88] illustrerer begrundelsen for konferencen med bla. følgende eksempel, der viser en matematikbrugers manglende forståelse for, hvordan matematikken indgår i en given anvendelse:

> "I en radioudsendelse for nogen tid siden kunne man høre en bonde, en forsker og en radiomand diskutere nitratforureningen ved gødskning. Forskeren havde foretaget et forsøg, hvis resultat

[3]Konferencerapporterne set under et er anbefalelsesværdige for lærere, der ønsker perspektiv på og inspiration til undervisningens praksis. De 4 sidstnævnte kan rekvireres ved henvendelse til IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

> bonden drog i tvivl. Forskeren kom da med det afgørende argument: 'Matematikken lyver jo ikke.' Så var både radiomand og bonde klar over, at det sidste ord var sagt i den sag." [SHF 88].

Eksemplet *er* illustrativt for alle konferencernes formål set under et. At forstå hvordan matematik indgår i konkret anvendelse, udgør et problemfelt, ikke bare med hensyn til, hvordan anvendelser af matematik må gøres til genstand for reel undervisning på videregående studier, men også i relation til de muligheder for manipulation overfor den alment uddannede befolkning, som anvendelser af matematik indebærer.

Flere af indlæggene på konferencerne konstaterer i forlængelse heraf en demokratisk fare i kombinationen af den stigende anvendelse af matematikken i samfundsrelevante problemer, og den manglende indsigt og forståelse af disse forhold i befolkningen. På konferencen [SHF 88] behandler Ole Skovsmose bla. "demokratiargumentet", dvs. det argument for matematikundervisning, der baseres på, at anvendelser af matematik i nutidens samfund er af omfattende demokratisk betydning. Demokratiargumentet indeholder ifølge Skovsmose tre påstande: For det første at den omfattende anvendelse af matematik "foregår under det teknologiske samfunds overflade. Matematikanvendelsen er reel og omfattende, men skjult." [SHF 88, p. 72f]. For det andet at matematikken gennem sine anvendelser har en samfundsformende funktion. Matematik indgår som en integreret del af samfundets teknologier på en unik måde, og man kan ikke forestille sig en samfundsudvikling, der blot minder om den vi er vidne til, uden den omfattende brug af matematik. For det tredje fremhæver han, at hvis man skal have mulighed for at udøve sine demokratiske pligter og rettigheder, må man være i stand til at identificere og forstå hovedprincipperne i de samfundsformende mekanismer. Specielt peger han på, at man som borger må være i stand til at gennemskue matematikanvendelsen [SHF 88, p. 73].

Igen kan eksemplet fra radioudsendelsen illustrativt, men forsimplet, konkretisere essensen i budskabet. Matematikundervisningen har en stor demokratisk forpligtelse i nutidens højteknologiske samfund, fordi anvendelser af matematik i meget stor udstrækning ikke er synlig, er kompleks, indgår i flere og flere sammenhænge herunder som beslutningsunderstøttende grundlag, og er dermed et potentielt magtredskab.

På konferencerne "Matematikundervisning og demokrati I/II" var dette naturligt i centrum for konferenceindlæggene og diskussionerne. Mogens Niss fastslår i sit oplæg "Matematiske modeller, almendannelse og demokrati", at matematikundervisningens hovedopgave er at sætte alle i stand til at forstå, tage stilling til og handle i og med matematikken, som den til enhver tid manifæsterer sig—synligt eller usynligt—i kultur og samfund. Han peger

bla. på, at især *synliggørelsen* af matematikkens samfundsmæssige betydning udgør en central problemstilling ift. denne opgave [SHF 90, p. 68].

De fremlagte synspunkter og problemstillinger peger ret udpræget på en opprioritering af den *individorienterede årsag*. En række synspunkter af mere *strukturel* art fremlagdes imidlertid også på konferencerne. Lad os derfor se på hvilke aspekter af matematikundervisningen, der lægges vægt på med udgangspunkt i dette synspunkt.

Studieforberedelse

På konferencen "Gymnasiets matematikundervisning mellem studie og erhvervskrav og demokratikrav" var tre af indlæggene fra gymnasiets aftagerinstitutioner; et lærerseminarium, DTU og cand.polit.-studiet (nationaløkonomi) på Københavns Universitet. Vagn Lundsgaard Hansen fra DTU melder klart ud:

> "Der ér sket svækkelser i det nuværende indhold i differential- og integralregning i forhold til det gamle pensum [han henviser givetvis til den matematisk-fysiske linje jvf. bekendtgørelserne før 1987] fra før den ny gymnasiereform. [...] Vi mener imidlertid at have fundet frem til en acceptabel løsning, givet de ydre rammer, som bla. indebar en nedgang i timetallet for faget matematik. Hele planen er imidlertid sårbar og tåler ikke mere udpining." [SHF 89a, p. 24]

Birgit Grodal fra økonomistudiet ved Københavns Universitet udtrykker *tilfredshed* med bekendtgørelsesændringen i 1987: "Imidlertid er det meget vigtigt, at de overordnede formål som anført i bekendtgørelsesteksten bliver opfyldt. Disse formål kunne være formuleret specielt med henblik på et senere studium af økonomi." Hun nævner endvidere en række konkrete matematiske forudsætninger, der skal være opfyldt inden økonomistudiet:

> "Da universitetets økonomiundervisning i så høj grad benytter matematiske begreber og metoder i analysen af økonomiske modeller, er det specielt nødvendigt, at de studerende i gymnasiet har 'opnået fortrolighed med anvendelsen af matematik som middel til at formulere, analysere og løse problemer indenfor forskellige fagområder': Det er således et <u>krav</u> fra økonomistudiet ved Københavns Universitet, at eleverne i gymnasiet: (1) bliver helt fortrolige med, hvad et bevis er. (2) bliver i stand til at gennemføre beviser for simple udsagn. (3) lærer at kende forskel på nødvendige og tilstrækkelige betingelser. (4) opnår beherskelse af

> matematik på et rimeligt abstraktionsniveau f.eks. er i stand til at analysere konsekvenser af antagelser på en funktion, uden at denne har en speciel analytisk form og at behandle vektorer, uden at koordinaterne er specifikke reelle tal. (5) opnår en sådan beherskelse af de forskellige emner, at notationerne ikke er en hindring for denne senere indlæring. (6) behersker det matematiske stof og ikke blot kan give en mekanisk gengivelse af formler og andre resultater. (7) generelt bliver vænnet til abstrakt tænkning."
> [SHF 89a, p. 31].

Ikke overraskende er udmeldingerne fra aftagerinstitutionerne, at de ønsker størst mulig faglig indsigt. Det er imidlertid interessant at bemærke, at der i de to fremhævede aftagerinstitutioners ønsker ser ud til at være en forskellighed: DTU lægger vægt på mere ren matematisk faglig indsigt, primært infinitisimalregningen, medens det fra økonomistudiets side udtrykkes, at især indførelsen af modelaspektet er helt i tråd med en studieforberedende undervisning.

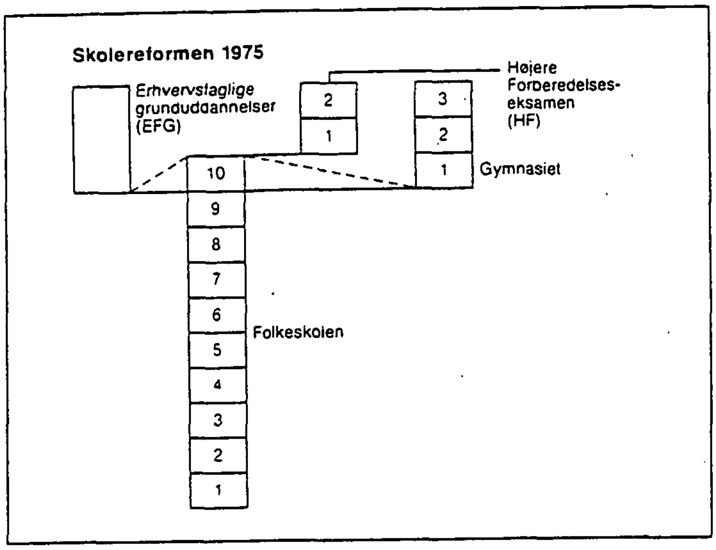
5.2.2 Uddannelsesområdet under forandring

Den opprioritering af uddannelsesområdet, der i løbet af 1950'erne førte til Den Blå og Den Røde Betænkning, var kun startskuddet til en lang række uddannelsespolitiske tiltag i den efterfølgende periode. Med skolereformen i 1958 opnåedes der ift. 1937-lovens mellemskolesystem betydeligt større reelle muligheder for, at også elever fra arbejder- og mellemklasse-hjem kunne komme i gymnasiet.

Med skoleloven af 1975 tog man endnu et skridt mod den udelte enhedsskole. Som det fremgår af figur 5.2, fik folkeskolen dermed den overordnede struktur, vi kender fra idag, med 9 års sammenhængende obligatorisk undervisning og et valgfrit 10. klassetrin. På de sidste klassetrin deltes klasserne i grundkursus og udvidet kursus i regning og matematik, sprogfag, samt fysik og kemi.

Herved fik man også større sammenhæng mellem gymnasieskolen og folkeskolen. I 1977 afskaffedes realafdelingerne på gymnasieskolerne, hvorefter folkeskole og gymnasieskolen som system var nogenlunde som i dag.

Hvis vi ser på undervisningssektoren som helhed, er der i det hele taget siden halvtredserne tale om en massiv udbygning af hele sektoren. Perioden fra 1960 til 1976 kan nok betegnes som den periode, hvor der er sket mest på uddannelsesområdet i nyere tid. Eksempelvis oprettedes EFG-uddannelserne i 1972, og fra 1960 til 1976 oprettes Odense Universitet, Danmarks Tekniske Højskole, Københavns Universitets afdeling på Amager, Roskilde Universi-



Figur 5.2 Kilde: [Kruchov 85, p. 271]

tetscenter og Ålborg Universitetscenter [UVM 78a]. Det er også i denne periode *gymnasiet* skifter status fra af have været, hvad man kunne kalde en "eliteuddannelsesinstitution" til hvad man kunne kalde en "masseuddannelsesinstitution", jvf. figur 4.1, side 53.

Samtidig med at adgangen til gymnasiet er blevet lettere som følge af de strukturelle ændringer i folkeskolen fra 1958 og frem[4], har en drejning i gymnasiets læseplan formentligt også bidraget til gymnasiets succes. I perioden før Anden Verdenskrig var pensum langsomt vokset så voldsomt, at det ifølge [UVM 78b, p. 41ff.] havde medført en relativt stor afstand mellem gymnasieuddannelsen og samfundets mere erhvervsrettede behov, og det havde bidraget til at gøre studentereksamen frygtet på grund af sit omfang. Dette havde igen medført en mindre tendens til eksperimenteren og selvstændig tilrettelæggelse af undervisningen; lærebøgerne, der havde en stor del af skylden for det store pensum, blev fulgt slavisk. Eleverne der fulgte med, var i stigende grad mindre selvsikre og selvstændige. Efter krigen blev en anmodning fra gymnasieskolens lærerforening efterkommet, gående på at bibeholde den midlertidige ordning, krigen havde givet anledning til, og som

[4]Fx. peges der i [Branner-Jørgensen 81, p. 212] på realskolens afskaffelse, som har gjort, at gymnasiet nu fremstår som den naturlige fortsættelse af folkeskolen for en elev, der ønsker en eksamen til brug for en videre uddannelse.

opererede med et mere realistisk niveau.

En anden bidragende faktor har givetvis været et generelt højere indkomstniveau og deraf følgende økonomisk overskud hos den øvre middelklasse, dvs. socialklasse II og III[5]. I [UVM 78b, p. 73ff] beskrives den sociale baggrund for eleverne i gymnasiet i 1966 og 1971, og det fremgår, at andelen af elever med en baggrund fra socialklasse II og III er vokset markant i løbet af disse 5 år.

De strukturelle ændringer i gymnasiets rekrutteringsgrundlag, folkeskolen, i form af 9 års obligatorisk skolepligt, kan naturligt tages til udtryk for et samfund, hvis kompleksitet fordrer et højere alment dannelsesniveau. Imidlertid kan den uddannelsesmæssige opprioritering i høj grad forbindes med den lighedspolitiske debat, der fandt sted fra slutningen af 60'erne og frem. Lad os derfor se lidt på de fremførte argumenter.

Lighedsproblematikken

I 1970 var *lighedsproblematikken* et stort emne i forskellige politiske diskussioner med socialdemokratiet i front. Allerede i socialdemokratiets partiprogram "Vejen frem" fra 1961 formuleredes det således:

> "En lige start—uafhængig af økonomiske og stedlige forhold—er en menneskeret. Der skal skabes et uddannelsesystem, som er smidigt nok til at give alle—børn, unge og voksne—den uddannelse og udvikling, som fremmer og imødekommer lyst, evne og indsats. Det er samfundets forpligtelse at sørge for, at tidssvarende skoler og læreanstalter og kvalificerede lærerkræfter til enhver tid er til rådighed for at imødekomme dette behov." [Vejen frem p.8], her gengivet fra [Kruchov 85, p.147].

Socialdemokratisk lighedspolitik skærpedes fra sidst i 60'erne. Alle skal have de samme muligheder for at læse videre efter folkeskolen. Den sociale arv skal brydes. Folkeskolen skal indrettes således, at der ikke (kan) skelnes mellem forskellige præstationer: "En almen folkeskole skal ikke være konkurrencepræget og navnlig skal der ikke på offentlig foranstaltning afholdes konkurrencer, hvis udfald i langt de fleste tilfælde er afgjort på forhånd af forældrenes økonomiske og kulturelle stilling", skrev Ritt Bjerregård i Politiken, 12/3 1975. Samme år iværksatte hun i sin egenskab af undervisningsminister en større

[5]Socialklasse II: Selvstændige med mellemstore virksomheder og overordnede funktionærer med 10-50 underordnede (i 1968 ca. 10% af befolkningen). Socialklasse III: Selvstændige med mindre virksomheder og funktionærer med ikke-rutinepræget arbejdet (i 1968 ca. 39% af befolkningen).

redegørelse for uddannelsesområdet frem til 1990 (U90) ved Det centrale Uddannelsesråd[6] (CUR).

Rapporten skabte politisk debat, bla. fordi den i meget kontante vendinger støttede socialdemokratisk lighedsideologi, der havde en dominerende rolle. Følgende vending er blot et eksempel, blandt mange, på dette: det anses "for meget betydningsfuldt, at det fra politisk side slås fast, at lighedsorientering er en central målsætning, der må respekteres fra første til sidste trin i uddannelsessystemet." [UVM 78a, p. 142]. I rapporten peges på, at 12 års uddannelse for alle er en nødvendig betingelse—men langt fra tilstrækkelig—for at mindske ulighederne i samfundet [UVM 78a, p. 128]. Endvidere påpeges det, at der i det tradionelle undervisningsstof skjuler sig rester af tidligere tiders diskriminerende menneskesyn, og at uddannelsessystemet bla. gennem beskæftigelse med mere samtids- og samfundsrelaterede problemstillinger kan afhjælpe problemet [UVM 78a, p. 142].

Der var i CUR stor intern uenighed om en lang række af punkterne, og der er i rapporten gjort fyldig plads til mindretals-udtalelser—hvor primært de borgerlige repræsentanter gang på gang stiller sig skeptisk til rapportens synspunkter om lighedsorienteringen, som de anser for at være forældrenes ansvar. Den mest markante mindretals-gruppe er dog fire ministerielt udpegede socialdemokrater[7], der har en 23 sider lang generel kritik af U90 bagerst i rapporten. De mener bla., at U90 på grund af de mange kompromisser og mindretalsudtalelser manglede klarhed og konsekvens [UVM 78a, p. 249ff]. Højrefløjen tog afstand fra U90. For eksempel afviste Bertel Haarder i en folketingsdebat i marts 1978 kategorisk hele U90, og Centrumdemokraternes Ingolf Knudsen anbefalede U90 til papirkurven [Bregengaard 84].

5.2.3 Uddannelse til demokrati

U90-rapporten bruger en del sider på at diskutere, hvad forfatterne kalder "uddannelse til demokrati" [UVM 78a, pp.97–101, pp.122–127]. På de sidstnævnte sider er der en interessant diskussion af, hvordan en almendannende undervisning pædagogisk set kan bidrage til uddannelse til demokrati. Kort fortalt advokerer flertallet bag U90 for, hvad man kunne betegne som socialdemokratiske synspunkter:

> "Skolen må lægge grundlaget for, at næste generation forstår, *hvordan det politiske system fungerer i nutidens Danmark*, hvor-

[6] CUR var bredt sammensat, repræsenterende et bredt spektrum af politisk holdninger, ministerielt udpegede personer, og et meget bredt udsnit af de faglige organisationer.

[7] Finn Brandt-Pedersen, Erik Jørgen Hansen, Else Marie Sejer Larsen og Gunhild Nissen.

> dan det fungerede tidligere, og hvorledes det er i andre lande. Og den skal gå et skridt videre og søge at give *en positiv holdning til de grundlæggende principper i vor form for folkestyre*, forstået sådan at unge vil gå aktivt ind for denne form og for at anvende dens muligheder—og udbygge og konsolidere dem. Der er faktisk væsentlige regler og principper, som næsten alle partier er enige om—eller i hvert fald enige om at profitere af—nemlig *retssikkerhed* og *retsbeskyttelse* for individet og de *demokratiske frihedsrettigheder*, som er fastslået i grundloven" [UVM 78a, p. 122].

Herefter sammenholdes dette syn med et mere højreorienteret værdineutralt syn på skolen:

> "Fra én side hævdes, at skolen og lærerne skal holde sig væk fra dette, fordi det er et anliggende for forældre, og der opstår risiko for konflikt mellem skole og forældre, hvis skolen blander sig i de moralsk og politisk betonede holdninger. [herefter citeres fra et borgerligt forslag til ny folkeskolelov fra 1972] ...Målet for opdragelsen kan være at gøre det muligt for den enkelte elev selv at tage stilling til væsentlige livsspørgsmål, og hertil hører også, at eleven bliver bekendt med andres standpunkter i en atmosfære, der er præget af gensidig tillid og respekt." [UVM 78a, p. 123].

og derefter med et venstreorienteret/marxistisk syn på skolen:

> "Heroverfor sættes kravet om, at skolen skal udvikle en *kritisk holdning*, specielt til kapitalismen, til magthaverne osv. eller bredere: en kritisk holdning over for de urimeligheder og uretfærdigheder, der er i samfundet. Den opfattelse, at 'ethvert hjem må kunne sende sit barn i skole med ro i sindet', kan imidlertid let blive en *politisk sovepude*, en vigen uden om samfundsproblemer." [UVM 78a, p. 124]

Herefter forsøges det at indkredse hvad der ligger i, at de unge skal uddannes til selv at kunne tage stilling:

> "Det kan ofte være svært at se forskellen på den foran omtalte opfattelse af det *selvstændigt og kritisk* tænkende unge menneske og den opfattelse, at skolen skal gøre de unge *samfundskritiske i den specielle forstand, at de får en negativ holdning over for det bestående samfund.* Det humanistiske krav om selvstændig stillingtagen er—måske lidt groft sagt—ofte blevet udnyttet som

> dække for en sådan *indoktrinering* i bestemte retninger, det være sig venstremarxistisk eller yderligtgående højrereaktionær. Her drejer det sig i virkeligheden ikke om en kritisk stillingtagen, men om *en afstandstagen ud fra et andet sæt værdinormer* end det officielt accepterede." [UVM 78a, p. 125]

Holdningen bagom det citerede er altså nogenlunde følgende: I et demokratisk land skal skolen på en eller anden måde bidrage til, at uddanne selvstændige unge mennesker, der kompetent og kritisk skal kunne danne sin egen mening baseret på sunde principper, og derfor kunne gennemskue forskellige argumenter og propaganda.

Noget sådant kan man næppe være uenig i. Den store uenighed består i, hvad de "sunde principper" er. Hermed kommer vi ind på meget ideologiske eller normativt prægede områder omkring hvordan statsmagten *bør* organiseres. Ser man rundt om i verdenen får man sikkert lige så mange bud på mulige måder at gøre dette på, som der er lande. Uenigheden, der afsløredes i debatten omkring U90, er således meget sigende for besværlighederne man løber ind i, i forsøget på at karakterisere det samfundsmæssige syn på undervisning som ét syn. På trods af den erkendte diversitet kan man imidlertid forsøge at karakterisere forskellige udmeldinger om "sunde principper" ud fra, hvordan de hver især forholder sig til forholdet mellem individ og statsmagt.

Uddannelse til demokrati: Aktør-struktur forholdet

Uddannelse til demokrati var det centrale emne på de konferencer, initiativet vedrørende matematikundervisning afholdt fra slutningen af 80'erne, men det står ikke klart, hvordan uddannelse til demokrati forholder sig til de samfundsorienterede og de individorienterede årsager. Vi vil derfor i det følgende især forfølge samspillet mellem disse årsags-typer. Vores interesse er udelukkende at give årsagerne indhold gennem diskussion. De potentialer der ligger i problemløsning og især modellering, er—grundet den definitoriske kobling mellem ikke-matematiske og matematiske genstandsområder—stærkt afhængige af, hvilken retning fagopfattelsen af matematik tager.

I artiklen [Niss 96] har Mogens Niss en pointe om hvilke samfundstyper (eller statstyper), der især har individorienterede elementer i formålsparagrafferne (og hvilke der ikke har):

> "Furthermore, societies in which traditions of democratic rule and control are old and strong and not completely subordinated to the forces of the free market economy (e.g. in the Scandinavian countries and the Netherlands) tend to place relativly more emphasis

on providing individuals with prerequisites for competent, active, concerned and critical citizenship." [Niss 96, p. 24].

Det er vores opfattelse, at denne opprioritering af den individorienterede årsag især fik vægt, i tilknytning til *relevanskrisen* i matematikundervisningen, dvs. omkring slutningen af 70'erne. I rapporten fra landsmødet om matematikken i Danmark i 1981 skitserer udvalget om gymnasieundervisningen—i afsnittet "Den aktuelle situation og aktuelle udviklingstendenser i Danmark"—hvad debattens to centrale problemer er. Det første problem er kløften mellem på den ene side en "intuitiv, heuristisk, omverdensorienteret matematikbeskæftigelse", og en studieforberedende strukturel matematik på den anden side. "Det andet problem er, hvordan en hensyntagen til elevflertallets private og samfundsmæssige liv skal afvejes med en hensyntagen til samfundets behov for specialiseret (og fåtallig) arbejdskraft på højt og måske snævert fagligt niveau" [Branner-Jørgensen 81, p. 214]. I forhold til de tre essentielle årsager fra kapitel 3, er det altså den økonomisk/tekniske og den individorienterede årsag, der her holdes op mod hinanden. I relation til disse årsager indeholder det citerede dog efter vores opfattelse en forsimpling af problemstillingen, idet der antydes en skarp opdeling af samfundsmæssige og individorienterede årsager. Dette er ikke muligt—der er ikke tale om en "enten eller" problemstilling, men om "både og".

Disse to fundamentale måder, at se samfundet på—fra *aktør* niveau og fra *struktur* niveau—hører til sociologiens helt centrale omdrejningspunkt, og betegnes der ofte som "aktør-struktur forholdet": Er det således samfundet der former individerne (således at individernes adfærd er afhængigt af det givne samfund?), eller er det individerne, der skaber samfundet (således at samfundet skabes af summen af individernes handlinger som de foretager af egen fri vilje?). Der er ikke ét rigtigt svar på spørgsmålene, fx. har de klassiske sociologer indtaget standpunkter på begge sider af dette forhold.[8]

Vi vender tilbage til diskussionen om forholdet mellem aktør og struktur. Nu vil vi på anden vis vende blikket "udad", og sætte uddannelses- og gymnasiematematik-konteksten i en større ramme.

---

[8] Blandt de mest kendte på den strukturelle side, dvs. indenfor den teoriretning man overordnet kalder *funktionalisme*, er Herbert Spencer (1820–1903) og Emilie Durkheim (1858–1917). I funktionalismen udgør helheden mere end summen af individernes adfærd.

Blandt de klassiske sociologer, der fokuserer på aktøren, er Max Weber (1864–1920). Weber er interessant af flere årsager: For det første kan hans begreber i vidt omfang siges at ligge bag organiseringen af embedsværket som statsmagtens forlængede arm i forhold til befolkningen og som rådgivende organ. For det andet er han interessant, fordi en række af de nutidige sociologiske tænkemåder er inspireret af hans arbejder.

Se endvidere [Andersen 96].

5.3 Træk af samfundsudviklingen fra 1960 til idag

I 1994 udkom bogen [Pedersen 94], der er skrevet af en række centralt placerede beslutningstagere herunder politikere. Bogen ønsker at skabe debat, hvilket understreges allerede i titlen: "Demokratiets lette tilstand". Forfatterne forsøger ikke at give en præcis analyse af forskellige demokratiske træk i konkrete problemstillinger, men at male et problematiserende billede af de demokratiske forhold idag. Bogen er derfor velegnet for os, i vores jagt på indholdet af "demokratisk kompetence".

Korporatismen og forhandlingssamfundet

Siden 50'erne, hvor hjørnestenene til den moderne velfærdsstat blev lagt, er den samfundsmæssige kompleksitet øget voldsomt. Vi har fx. fået kommunalt selvstyre, medlemskab af EU, og så har vi fået det, politikere og politologer kalder en *forhandlingsøkonomi*. Fra 1970'erne og frem får tendensen især kraft. I [Pedersen 94] tegnes et billede af et samfund, hvor politikken udbredes med voldsom hast; hvor et stærkt stigende antal beslutninger af betydning for os alle, ikke længere er underlagt direkte parlamentarisk kontrol. Således er økonomien, det lokale selvstyre, transnationale konstellationer, virksomheder og individer, nu dominerende for den reelt førte politik.

Man kan hurtigt komme i tanke om en række eksempler på områder udenfor parlamentarisk kontrol: I kraft af rammelove, hvis antal steg konstant gennem 60'erne og 70'erne, får embedsvældet eller forvaltningen betydelig magt i forhold til gennemførsel og udformning af retningslinjer for de forskellige politikker. I kraft af EU-medlemskab er grænserne for, hvad folketinget beslutter, under forandring. I kraft af, at de *korporative* kanaler nu er stærkt inddraget og knyttet til dansk politik, er virksomheds- og lønmodtagerorganisationerne inddraget i arbejdsmarkedspolitikken, uddannelsespolitikken, miljøpolitikken mv. Det samme gælder i et vist omfang interessegrupperne. Men lad os først se på nogle politologiske forhold om samfundets indretning.

Embedsværket og idealet om den parlamentariske styringskæde

Den parlamentariske styringskæde kan beskrives som en forsimplet model af det politiske system. I grundloven fastsættes en magtdeling, således at den *lovgivende* magt er hos regeringen og Folketinget i forening (den lovgivende forsamling), den *udøvende* magt hos regeringen, og den *dømmende* magt hos domstolene. Grundloven kan dermed opfattes som en ramme for,

hvordan det politiske system skal fungere—en ramme som den parlamentariske styringskæde tager udgangspunkt i. Embedsværket (eller forvaltningen eller embedsvældet) er *regeringens* apparat til iværksættelse af den politiske vilje, samt har til funktion at rådgive regeringen i det lovforberedende arbejde. I praksis sikrer *parlamentarismen*, at den siddende regering ikke kan handle mod et flertal i Folketinget, men formelt er embedsvældet altså regeringens organ. Hvis magtdelingen i grundlovens ånd skal give mening, skal embedsvældet være *neutralt* såvel som kompetent. I forhold til befolkningen, bygger embedsværkets autoritet på statsmagtens monopol på brug af tvang, ligesåvel som det må respektere de lovgivningsmæssige begrænsninger, der beskytter befolkningen mod magtmisbrug. Embedsvældets rolle er altså lidt forsimplet udtrykt karakteriseret ved ansvar overfor det parlamentariske flertal i Folketinget og magt overfor befolkningen.

Forhandlingsøkonomi

Vi beskrev i kapitel 4, hvordan velfærdsstaten og korporatismen etableredes efter Anden Verdenskrig. Keynesianismen legitimerede finanspolitiske indgreb som et overvejende statsligt ansvar, og behovet for at regulere vækstøkonomien var i 1950'erne startskuddet til, at stat og organisationer virkede sammen gennem forhandling og uddelegering af ansvar. Det er det, der ligger i begrebet *korporatisme*.

I bogen [Pedersen 94] kaldes samarbejdet om reguleringen af den danske økonomi (forhandlingsøkonomien) for "den samfundsøkonomiske konstitution", hvilket kan ses som en understregning af at samarbejdet mellem stat og organisationer gennem de offentlige udvalg er lagt i faste rammer—det er *institutionaliseret*. Forfatterne nævner for det første de mange råd, nævn og udvalg, der er oprettet i den offentlige forvaltning, og for det andet de mange institutioner på det private arbejdsmarked som eksempler. Den lovgivningsmæssige måde dette samarbejde sker på, er primært via *rammelovgivning*, dvs. lovgivning, hvor de principielle rammer fastlægges af Folketinget, og hvor udfyldningen af rammerne er overladt til embedsværk og organisationer i tilknytning til området i fællesskab.

Professionalisering af forvaltningen

Den stadigt mere omsiggribende regulering har medført en omfattende professionalisering af forvaltningen eller embedsværket. I [Pedersen 94] står især økonomerne for skud, idet de kalder cheføkonomerne i de forskellige offentlige og private organisationer for *kampagneøkonomerne*, for at indikere disses muligheder for målrettet politisk manipulation. Det forhold, at alt gøres til genstand for økonomisk analyse, bliver styrende for den politiske virkelighed:

> "Det er ... gennem kampagneøkonomernes allestedsnærværende redegørelser og rapporter, at der skabes sprog om, hvilket samfund det er, vi lever i, hvilke problemer dette samfund står over for og hvilke løsninger det er muligt at anvende. Det er gennem redegørelser og rapporter, gennem det konstante spil om at sætte holdninger og erfaringer på sprog, at sprogspillet har afløst den direkte politiske formulering af problemer, mål og veje." [Pedersen 94, p. 49].

Dette "sprogspil" dækker i bogen generelt over det forhold, at de offentlige institutioner *professionaliseres*. Og her mener de ikke kun embedsvældet, eller forvaltningen:

> "De mægtigste politikere i dagens Danmark er chefølonomerne: de økonomiske konsulenter og vismænd, rådgivere og sekretærer—i Budgetdepartementet, Det Økonomiske Råd, de store organisationer, de nationale banker, forsikringsselskaber, OECD, Arbejderbevægelsens Erhvervsråd og de andre tænketanke." [Pedersen 94, p.47].

Den enkelte borger og demokratiet

I forhold til idealet om den parlamentariske styringskæde, er situationen i dagens samfund, som den er beskrevet, præget af kompleksitet. I [Pedersen 94] argumenteres bla. derfor for, at den stigende videnskabeliggørelse af de offentlige institutioner udgør et særligt demokratisk problem. Risikoen for målrettet manipulation må modsvares af befolkningens *reelle* mulighed for deltagelse og indsigt. Forfatternes antydning af en løsning involverer argumenter for de ikke-politiske institutioners betydning; biblioteker, videnskabelige og kulturelle akademier etc.:

> "For os at se, er paradoksernes paradoks derfor den eneste mulighed: at skabe rum for stadig flere informationer, andre informationskilder, flere måder at tænke på, stedse flere meninger, endnu flere anskuelser. Vi opfordrer til en udvidelse af folkestyret (den offentlige opinion), gennem en styrkelse af alle former for modspil til sprogspillet. Informationens orkan, meningernes turbulens er faktisk den eneste mulighed for at politisere, hvad de professionelle har gjort professionelt. [...] Det hjælper ikke meget, at der findes en formel frihed til at ytre sig, hvis den allerede er besat af offentlighedens scenografer. Og hvad kan det nytte, at alle har

> frihed til at tale, hvis de intet har at sige, fordi hvad der kan tales om, allerede er bestemt af kulturens teknologer." [Pedersen 94, p.194f]

Der er altså ikke tvivl om, at samfundsudviklingen har medført, at politisk indflydelse er blevet til betydeligt mere end blot at sætte et kryds hvert 4. år. Dels er *mulighederne* for demokratisk indflydelse blevet forøget, dels er det efterhånden erkendt, at den reelle mulighed for indflydelse kræver noget nyt; en *demokratisk kompetence*—der ikke kan forventes automatisk at opstå i kølvandet på isolerede faglige studier.

5.4 Halvfemsernes fagopfattelse af matematik

Vi har i det forudgående ved at inddrage nogle få sociologiske og politologiske forhold forsøgt at give indhold til det noget udsvævende ønske om "uddannelse til demokrati" eller udvikling af "demokratisk kompetence". Vi har ikke endnu forsøgt at diskutere, om uddannelse til demokrati er en rigtig karakteristik af den eksterne opfattelse af matematikundervisningen, der har præget halvfemserne. Det mener vi selv den er, og ligeså gør initiativet vedrørende matematikundervisningen under Statens Humanistiske Forskningsråd. I forsøget på at afklare hvilken betydning, der egentligt kan tillægges "uddannelse til demokrati", har vi uomtvisteligt fået en række gode argumenter for, at et sådant uddannelsesprojekt ikke bare er rimeligt, men også *nødvendigt* idag.

På konferencen beskrevet i [SHF 88] spurgte planlægningsgruppen: "Hvordan kan matematikundervisningen bidrage til at udvikle de egenskaber, den lille dreng i 'Kejserens nye Klæder' lagde for dagen?" [SHF 88, p. 15]. Det er en meget kort og præcis måde at udtrykke essensen i "uddannelse til demokrati": Den enkelte elev skal på en eller anden måde gennem uddannelsen få konstrueret *kompetencer*, som er nødvendige, men ikke tilstrækkelige til at sikre en *modig* og *kritisk* attitude således at "medløberi" undgås.

Et sådant syn på matematikundervisning ligger nogenlunde indenfor det—nu 20 år gamle—kritikbegreb, vi fremlagde fra U90. Men altså kun nogenlunde, for der er en væsentlig forskel. Denne forskel er i det væsentligste en *betydeligt højere betoning af den individorienterede årsag idag.*

Med sociologiske termer er "uddannelse til demokrati" i U90 set fra *struktursiden*; "samfundet skaber individerne". I forhold til de årsager, vi fremlagde i kapitel 3, relateres dette til den politisk/kulturelle årsag. Kritik i denne betydning bliver til kritik, der med udgangspunkt i opretholdelse af det nuværende demokratiske samfund, samtidig sætter fokus på den enkelte borgers mulighed for at indgå aktivt i udbygningen og konsolideringen af det.

De egenskaber den lille dreng fra Kejserens nye Klæder lagde for dagen, og den kompetence, der efterspørges i [Pedersen 94], er af en anden karakter: De er individorienterede—de tager begge udgangspunkt i, at der må opbygges *reelle* kompetencer, der sætter individer i stand til at sætte kompetente spørgsmålstegn ved ikke-synlige demokratiske skævvridninger.

Vi mener videre, at ønsket om at udvikle sådanne kompetencer indenfor det danske uddannelsesprojekt har en meget bred politisk opbakning idag. Derimod mener vi ikke, at det danske uddannelsessystem afspejler dette ønske i praksis—heller ikke det modsatte. På det punkt tydeliggøres dels vigtigheden af didaktisk forskning, og dels de mange udfordringer, denne forskning står overfor.

At matematikundervisningen skal bidrage til "uddannelse til demokrati" gennem at udstyre det *enkelte individ* med forudsætninger for at handle som den lille dreng fra Kejserens nye Klæder, at dette er af mere demokratisk end partipolitisk karakter, og hvad det betyder mere konkret for matematikundervisning, vil vi nu forfølge.

Uddannelse til demokrati: Individorienteret "mündigkeit"

Bertel Haarder sagde i en tale ved LMFK's landsmøde i 1983 følgende:

> "Det er min opfattelse (og jeg håber, at jeg har ret i den), at gymnasiets matematik-, fysik-, og kemiuddannelse er almendannende i netop den forstand, at den udruster eleverne med værktøj til at beskrive og erkende komplicerede fænomener. Det enkelte menneske i et højt udviklet industrisamfund som det danske skal som et led i sin personlige udrustning have en mulighed for en kvalificeret indsigt i og stillingtagen til de mange beslutninger, der træffes med baggrund fx. i eksperters anvendelse af matematiske modeller. Det gælder spørgsmål om teknik, teknologi, økonomi, folkesundhed osv. Hvis den enkelte skal have mulighed for andre holdninger end 'dyb ærbødighed og bøjen sig for eksperters udsagn' eller 'total mistillid og afvisning af samme', så forudsætter det en indsigt i matematisk modelbygning." Her citeret efter [Pilemann 96, p.168].

De efterspurgte egenskaber, vi ser i dette citat, og endvidere i [Pedersen 94] og [SHF 88], indfanges af begrebet *mündigkeit* i den betydning, Ole Skovsmose fremstiller det i afsnittet "Education for mündigkeit" i [Skovsmose 94][9]. Med mündigkeit forstås her noget mere end vi sædvanligvis

[9]Begrebet *Mündigkeit* stammer fra Theodor Adorno fra "Frankfurther-skolen", men er fasttømret i tysk didaktik, se [Skovsmose 94, p. 40f].

lægger i betydningen af "myndighed". Myndighed refererer sædvanligvis til den fulde opnåelse af rettigheder og ansvar i samfundet. Mündigkeit betyder mere:

> "...that of having the capacity to speak for oneself. In that way *Mündigkeit* becomes an essential constituent of a critical citizenship. It unites features of a democratic competence together with a critical capacity. A person with *Mündigkeit* shows the capacity to take well-balanced decisions. Therefore it makes sense to educate for *Mündigkeit*, not to educate 'followers'. The main task of education is to prevent the occurrence of a new Auschwitz." [Skovsmose 94, p. 41]

Uddannelse til demokrati må og skal betyde uddannelse til "mündigkeit". Og det indebærer som et sundt demokratisk træk, at den individorienterede årsag til at ville udbyde (matematik-)undervisning er dominerende. Vi kan se, at et uddannelsessystem, der har sådanne kompetencer der indfanges af "mündigkeit" som (individorienteret) mål, vil afhjælpe det demokratiske problem, Bertel Haarder påpeger i citatet tidligere.

Kapitel 6

Potentialer i arbejde med problemløsning og modellering

6.1 Nutidens fagopfattelse

"Uddannelse til mündigkeit". Sådan mener vi den nutidige fagopfattelse af matematik kan beskrives. Den aktuelle situation i gymnasiet afspejler ikke dette—som vi problematiserede i kapitel 1. Som i alle øvrige politiske spørgsmål er også uddannelsespolitikken udtryk for et kompromis; som en følge af parlamentarismen; som en følge af knappe ressourcer; men også som følge af manglende forskning—og dermed indsigt. Problemet er nemlig, at matematik indgår i samfundet på svært begribelige måder, ikke direkte som fx. datalære og informatik, men indirekte i samfundets grundforhold [Niss 84, p. 43].

Inden vi diskuterer, hvilke potentialer problemløsning og modellering har ift. nutidens matematiksyn, må det præciseres. Stoppede vi her, er den uundgålige konklusion noget i retningen af det, Bertel Haarder så udmærket udtalte på LMFK-mødet: Modellering skal indgå i matematikundervisningen, fordi "indsigt i matematisk modelbygning" er central for at kunne opvise "mündigkeit" overfor eksperters og andres brug af avancerede matematiske metoder. Men en sådan pointe er utilstrækkelig, og den er heller ikke dækkende: Modelbygning er ikke det samme som modellering, som vi definerede betydningen heraf i kapitel 2—her betyder modellering meget mere end modelbygning. At pointen er utilstrækkelig skyldes, at uddannelse til mündigkeit ikke konkret er tillagt betydning ift. matematikundervisning. Og videre det forhold som skrevet ovenfor, at matematik vedrører samfundets grundforhold.

En vurdering af problemløsning og især modellerings potentialer i det moderne fagsyn—det vi kalder uddannelse til mündigkeit—må dermed tage udgangspunkt i den særlige måde, matematik indgår i skabelsen af den de-

mokratiske distance, som den skitseres i [Pedersen 94].

6.1.1 Matematik og demokratisk distance

Det grundforhold hvor matematik mest oplagt indgår, er i udviklingen af teknologi: Matematik har indgået helt centralt i den udvikling, der beskrives i [Pedersen 94], fordi matematik indgår mere eller mindre tydeligt i udviklingen af den teknologi, der ligger til grund for professionaliseringen af forvaltningen[1]. Hvor tydeligt matematik indgår afhænger af hvilken teknologi-type, der er tale om. Ole Skovsmose skelner i [Skovsmose 90a] mellem 4 former for teknologi: "manual tools (hammer), technology of natural processes (steam engine), social technologies (scientific managemant), information technology (computer science)" [Skovsmose 90a, p. 765]. Og han påpeger, at matematik især i de to sidstnævnte teknologiformer er relateret til udviklingen—for informationsteknologiens vedkommende helt afgørende.

I dag taler didaktikere derfor om, at matematikkens rolle i samfundet er forbundet med *formningen af samfundet*, se fx. [Niss 84] og [Skovsmose 94, kap. 3]: Matematik indgår i forudsætningerne for samfundets teknologi, produktion og styring, og det indgår i vores billede af verdens indretning. Synligheden af matematikkens rolle i relation til de 4 teknologi-former, Ole Skovsmose adskilte, er på paradoksal vis mindre for de sidstnævnte teknologityper, hvor den er mest betydende for teknologi-udviklingen. Med informationsteknologiens opblomstring indgår matematikken fx. i regulering af samspillet mellem menneske og naturen.

Et eksempel er, hvordan matematik indgår i én af de måder, vi i Danmark fører miljøpolitik på: Fortyndingsstrategien. Denne går i korte træk ud på, at sprede giftstoffer tilstrækkeligt meget til, at koncentrationen i udvalgte områder (typisk beboelsesområder) kommer under en eller anden kritisk værdi (grænseværdi). På baggrund af matematiske *dispersionsmodeller* (spredningsmodeller) beregnes, hvor de udledte stoffer bevæger sig hen, og resultaterne af sådanne modelkørsler udgør en del af det politiske beslutningsgrundlag. Det kan med rimelighed antages, at kun en ganske lille del af befolkningen er vidende om, at matematik indgår helt centralt i sådanne beslutninger, endsige at sådanne modeller eksisterer—for slet ikke at tale om *hvordan* matematikken indgår. Hvis dette er tilfældet, får argumenter som "matematikken lyver ikke" frit spil i en forestilt demokratisk debat.

[1]Hvor forvaltning indebærer betydeligt mere end embedsværket, nemlig alle aktører mellem Folketinget og folket.

6.1.2 Kritisk matematikundervisning

Når uddannelsessynet indebærer uddannelse til mündigkeit, og når matematik indgår som en central faktor i skabelsen af en demokratisk afstand eller skævvridning som følge af professionaliseringen af forvaltningen, må fagopfattelsen af matematikundervisning kunne indfanges af det betydningsindhold, Ole Skovsmose tillægger *kritisk matematikundervisning*:

> "Critical Mathematics education is described in terms of 'concerns' which cover the following issues:
>
> a) Citizenship identifies schooling as including the preparation of students to be an active part of political life.
>
> b) Mathematics may serve as a tool for identifying and analyseing critical features of society, which may be global as well as having to do with the local environment of students.
>
> c) The students' interest emphasises that the main focus of education cannot be the transformation of (pure) knowledge; instead educational practice must be understood in terms of acting persons.
>
> d) Culture and conflicts raise basic questions about discrimination. Does mathematics education reproduce inequalities which might be established by factors outside education but, nevertheless, are reinforced by educational practice?
>
> e) Mathematics itself might be problematic because of the function of mathematics as part of modern technology, which no longer can be reviewed with optimism. Mathematics is not only a tool for critique but also an object of critique.
>
> f) Critical mathematics education concentrates on life in the classroom to the extent that the communication between teacher and students can reflect power relations." [Skovsmose 96, p. 1257]

Med en sådan skærpet fagopfattelse af matematikundervisning er "indsigt i matematisk modelbygning" ikke længere tilstrækkelig. Problemet består i, at matematikken er så grundlæggende; indenfor en bred vifte af andre fagdiscipliner indgår matematik i samfundets strukturer. Kritisk matematikundervisning peger på, at sådanne strukturer må problematiseres, og vigtigere; at denne problematiseren skal gøres til genstand for undervisning—mündigkeit følger *ikke* alene af faglig fordybelse. I forhold til det kritiksyn, der diskuteredes i relation til U90, virker et sådant syn måske stærkt individorienteret og samfundskritisk, i den betydning der i U90 udtryktes som "at skolen skal gøre de unge *samfundskritiske i den specielle forstand, at de får en negativ holdning over for det bestående samfund*". Synspunktet i U90 slår dog næppe til idag, dertil er det alt for unuanceret. Som vi har været inde på, er uddannelses-synet i U90 struktur-orienteret, og som vi også har været inde på, er der idag behov for et mere individorienteret syn på uddannelse.

Overskridelse af aktør-struktur dualismen

For at forstå mekanismerne, der nødvendiggør det skarpere kritikbegreb, der ligger i kritisk matematikundervisning—som et led i at tilføre det enkelte individ reelle demokratiske kompetencer—kan vi bruge nogle begreber og tænkemåder hos moderne sociologer som fx. Anthony Giddens. Giddens udgangspunkt er, at dualismen mellem de teoriretninger, der orienterer sig mod hhv. struktur og individ, skal *overskrides*. En sådan sociologisk tilgang kan efter vores opfattelse bidrage til at afklare samspillet mellem de samfundsmæssige (strukturelle) og de individorienterede syn på undervisning.

Anthony Giddens ide i hans *strukturationsteori* er at reformulere de teoriretninger, der orienterer sig på hver side at aktør-struktur-forholdet. Han taler om, at forholdet ikke skal betragtes som en dualisme, men en dualitet. Ved *strukturdualitet* forstår han således en sammenhængende relation, hvor struktur både ses som midlet *til* handlinger og resultatet *af* handlinger. Det at skabe struktur samtidig med at formes af strukturen, ser Giddens som samfundets strukturationsproces—den *sociale praksis*. Social praksis er hans medierende begreb mellem handling og struktur.

Ifølge Giddens kan en *agents* handlinger være rutiniserede, dvs. underlagt hvad han kalder *praktisk bevidsthed*. Sådanne handlinger foregår altså på et praktisk bevidsthedsniveau—vi behøver ikke at tænke over dem. De fleste af de tilbagevendende handlinger fra dagligdagen foregår på dette bevidsthedsniveau; tage bussen, lave kaffe, have en matematiktime etc. Sådanne handlinger gør vi ikke—eller kan vi ikke—gøre rede for, det er ikke nødvendigt. I modsætning hertil er *diskursiv bevidsthed*: Handlinger, vi eksplicit kan gøre rede for, er udtryk for den diskursive bevidsthed. En anden måde at udtrykke dette på, er ved at tænke på sådanne handlinger som *reflekterede* handlinger. En af Giddens centrale pointer er, at et socialt system som fx. bybussernes daglige trummerum—hvor de hver dag kører de samme ruter, passagerer stiger på, køber billet, sætter sig, stiger af—skabes eller reproduceres af handlinger, der gentages, og derfor strækker sig ud over en enkelt handling: "Sociale systemer er social praksis, der reproduceres, hvorved et mønster af sociale relationer opstår" [Kaspersen 96, p. 403]. Strukturer eksisterer ikke som en ydre ramme. Strukturer eksisterer kun i selve praksis, og man kan forstå strukturer som noget, der fremkommer i vores hukommelsesspor, når vi reflekterer diskursivt over en tidligere udført handling. Sagt anderledes *er* strukturen ikke, den skabes hele tiden qua agenter, der trækker på selvsamme struktur (eller rettere strukturelle egenskaber), når der handles [Ibid.].

Når Giddens således ved *strukturdualitet* forstår "en sammenhængende relation, hvor struktur både ses som midlet *til* handlinger og resultatet *af* handlinger" er aktør-struktur-forholdet overskredet og samtænkt til en dualitet. Den traditionelle opfattelse af strukturer som strukturelle egenskaber bestående af regler og ressourcer indebærer et deterministisk element ("samfundet former individerne"). I Giddens begrebsapparat er struktur nu noget, der både er mulighedsskabende og handlingsbegræsende. Lars Bo Kaspersen nævner sproget som et eksempel:

> "Når jeg taler dansk, trækker jeg på nogle regler, der gør mig i stand til at formulere mig forståeligt. Samtidigt reproducerer jeg disse regler og dermed sprogets struktur. Sproget er mulighedsskabende i og med, at jeg kan udtrykke mine ønsker og intentioner, men i det øjeblik, min motiver/ønsker ikke kan udtrykkes i ord, bliver sproget begrænsende. Ligeledes kan det danske sprog være end begrænsning, hvis jeg møder en person uden for dette sprogområde." [Kaspersen 96, p. 404].

Giddens nævner, at de regler og ressourcer, som agenten trækker på i handlingerne, er dybt indlejret i vores uudtalte praktiske bevidsthed. Han nævner et eksempel, hvor ballademageri i en skole kan være udtryk for en ubevidst handling rettet mod strukturerne, men hvor børnene gennem balladen faktisk reproducerer autoritetsstrukturen, idet de tvinger systemets autoritative agenter (lærerne) til at reagere.

Anthony Giddens strukturationsteori er naturligvis ikke fyldestgørende dækket i det ovenstående. Og ligeså er hans projekt med at bruge sit begrebsapparat i en *modernitetsanalyse*—en samtidsdiagnose, heller ikke inddraget. Vi kan dog allerede nu fremhæve en pointe ift. kritisk matematikundervisning. Vi kan nemlig påpege, at hvis agenter ikke, bla. gennem uddannelsessystemet, sættes i stand til at handle bevidst dvs. reflekteret, reproduceres den sociale praksis. Derfor må en sådan reflekteren eksplicit gøres til genstand for undervisning.

6.1.3 Modellering og demokratisk kompetence

Refleksiv viden

Vi kan komme længere ind i, hvordan disse undervisningsmæssige problemstillinger kan knyttes til den udbredte og grundlæggende anvendelse af matematik, vha. begrebet *reflective knowledge*, som Ole Skovsmose fremlægger i [Skovsmose 90a]. Han skelner her mellem forskellige former for viden i tilknytning til modelleringsprocessen (frit oversat efter: [Skovsmose 90a, p.767]):

1. Matematisk viden i sig selv;
2. En teknologisk viden, som viden om hvordan en matematisk model bygges, og bruges;
3. En refleksiv viden, der har karakter af en metaviden om modellers natur, kriterier i forudsætningerne for modellerne, deres anvendelser, og vurdering af modeller.

For at udvikle et betydningsindhold til refleksiv viden, betragter Ole Skovsmose en række problemstillinger relateret til modelleringsprocessen. Under overskriften "Concealment of pre-understanding" problematiserer han model begrebet som model af virkeligheden (jvnf. kapitel 2 figur 2.1). Han fremhæver, at en model i stedet må betragtes som en model af en *fortolkning* af virkeligheden:

> "We have to make an interpretation of reality; that means making a structuring of reality which creates patterns. We have to identify elements from reality which are to be conceived as important; we also have to decide which relationships among these elements are essential. These selections constitute an interpretation of reality."[Skovsmose 90a, p. 770].

En anden central problemstilling, der bør gøres til genstand for refleksion, er nødvendigheden af at inddrage overvejelser omkring de for modelleringen bagvedliggende interesser. Matematiske modeller kan tiltænkes beskrivende, forudsigende, eller foreskrivende anvendelser. Indenfor hver af disse anvendelser er en række forhold, der kan gøres til genstand for refleksion:

> "If we try to draw a descriptive conclusion from a model developed for prescriptive purposes, we make the descriptive fallacy committed too often, owing to conflicting interests built into the (invisible) process of system development." [Skovsmose 90a, p. 772].

Endvidere påpeger han under overskriften "Creating a non-existing object", at der bør knyttes opmærksomhed til det forhold, at modeller somme tider opfattes som "billeder" af noget virkeligt:

> "By this we have identified the third main problem related to mathematical modelling: the nature of mathematical language makes it tempting to accept a picture-theory and by doing this to invent an object to be pictured by the mathematical model." [Skovsmose 90a, p.775].

En model kan fx. reproducere et fænomen, uden at "mekanismen" i modellen kan *forklare* fænomenets fremkomst på baggrund af årsagen. Sådanne "black-box" modellers anvendelse må derfor helt oplagt gøres til genstand for refleksiv analyse.

Modellering, refleksiv viden og demokratisk kompetence

Der ligger langt mere, end vi her har kunnet få med, i begrebet *reflective knowledge*. Det, som den korte gennemgang kan illustrere, er at der er store potentialer i, at arbejde med modellering i gymnasiets matematikundervisning. Det er nødvendigt for at udruste den enkelte studerende med *reelle* demokratiske kompetencer. I det post-industrielle samfund er der en dobbelthed af betydning for potentialerne i at arbejde med modellering i undervisningen. Dobbeltheden består i at undervisningen samtidigt kan bidrage til dannelsen af en stadig større gruppe af professionelle og til at fremme de heraf afledte særlige *demokratiske kompetencer*.

6.2 En ny intern matematikforståelse bryder frem

6.2.1 Socialkonstruktivisme

På et afgørende punkt i den matematikfaglige forståelse er situationen fundamentalt anderledes idag end i 60'erne. Den interne matematikfaglige forståelse er til debat. Det er den formentligt som følge af, at matematikkens begrundelse ikke længere hviler i sig selv. Matematikundervisningen skal honorere årsagen til at det udbydes, men når denne årsag indeholder en dobbelthed i form af sikring af kompetencer i matematik og sikring af kompetencer i retning af kritisk forholden sig til matematik og matematikbrug, er den hidtige matematik interne faglige opfattelse af faget utilstrækkelig. Den kan nemlig ikke redegøre for, hvordan forhold af ekstra-matematisk karakter påvirker matematikforståelsen i matematikersamfundet. Begyndende tegn på svaghed i det ellers så videnskabeligt sikrede fundament for matematikken viser sig i form af et opbrud i den årtusindelange absolutistiske filosofiske opfattelse af matematik.

Paul Ernest har et lignende udgangspunkt, og argumenterer i [Ernest 91] imod de eksisterende matematik filosofier, bla. ud fra deres egne præmisser (intern) (opgør med absolutismen gennem kritik af axiomatisk deduktive metoder, og forsvar for fallibilistisk orienterede teoriretninger).

Endvidere mener han ikke matematikopfattelsen kan frakobles fagets relative position i forhold til andre "realms of knowledge". Matematik er forbundet med, og en del af "the whole fabric of human knowledge". Matematik er indlejret i vores historie og vores handlen, så matematik kan ikke adskilles fra de sociale og humanistiske videnskaber eller menneskelig kultur i det hele taget.

Paul Ernest argumenterer derfor for, at en matematikfilosofi nødvendigvis må pege ud over matematikken selv, fx. for at forklare hvorfor matematik er så anvendeligt i samfundets problemstillinger. Endvidere må den være fallibilistisk, dvs. afspejle det forhold, at matematikken er potentielt fejlbarlig og korrigerbar.

Sociologisk betragtet er uddannelse uden kritik altså den strukturorienterede eller "ovenfra og ned holdning": skolen skal indsocialisere individet til den eksisterende kultur og være informationsformidler. Uddannelse med kritik er mere aktørorienteret: samfundets strukturer skabes gennem social praksis, som består af såvel bevidste som reflekterede handlinger opfattet som summen af de *enkelte* individers handlinger. Giddens strukturationsteori beskriver netop samfundets institutioner som opretholdt gennem den enkelte borgers reproduktion af samfundet. Hvis reproduktionen ophører falder institutionen. Det er således et interessant didaktisk forskningsområde i sammenkædningen af socialkonstruktivismen og Giddens strukturationsteori.

6.2.2 Potentialer ift. det strukturalistiske syn

Hverken problemløsning eller modellering har potentialer i sig selv. Ole Skovsmose udtrykker det således:

> "Anvendelse af matematik er principielt adskilt fra udvikling af matematiske teorier. Som matematiker [formalist] er man beskæftiget med at udvikle formelle systemer. Det er ikke-matematiske overvejelser der må inddrages for at diskutere anvendeligheden af teoridannelserne" [Skovsmose 90b, p.52].

Paul Ernest, der gør op med bla. den formalistiske matematikfilosofi, som han klassificerer som absolutistisk, påpeger, at absolutistiske matematikopfattelser (som den strukturalistiske) betyder, at matematikken ikke har noget socialt ansvar [Ernest 91, p. xii].

Konklusionen må pege hen imod det ikke overraskende, at problemløsning og modellering med et teknologipragmatisk samfundssyn og et strukturalistisk matematiksyn (hvormed vi mener disse syns parring *som udgangspunkt*) ikke umiddelbart kan siges at have nogen potentialer *af begrundelsesmæssig karakter*.

Der er fælles træk mellem et teknologipragmatisk samfundssyn og et strukturalistisk matematiksyn: Ingen af dem lægger op til en kritisk vinkel. Det eksterne syn betyder, at studenter, der ikke læser videre, ikke behøver at vide det store om anvendelser—hvorfor modellering og problemløsning ikke har potentialer for den gruppe. Den strukturalistiske matematik gør, at der på gymnasialt niveau er tale om at forstå et færdigt produkt.

6.3 Potentialer ift. nutidens matematikopfattelse

Almendannelse

Betydningen af almen dannelse er skiftet. Med så mange i gymnasiet, kan det ikke længere betragtes som en kulturelt berigende bogligt orienteret elite studie. Idag er betydningen af almen dannelse tilnærmet folkeskolens. Det hænger sammen med samfundets eksplosive udvikling mht. (informations)teknologisk, politologisk og sociale udvikling. Det kræver simpelt hen en større viden og indsigt i samfundsmæssige forhold at begå sig i det daglige liv, at begå sig i det samfundsmæssige liv.

Modellering i den forstand vi beskrev processen i kapitel 2, har ikke overraskende meget store potentialer ift. udviklingen af en demokratisk kompetence. Matematiske modellers anvendelser er eksploderet bla. som følge af edb-teknologiens fremvækst. De indgår bla. som beslutningsgrundlag i politiske problemstillinger. Det er dermed noget *selvfølgeligt* at potentialerne er meget store ift. denne opfatte af matematikundervisning.

Et interessant spørgsmål går i retningen af hvorfor det er matematiklæreren der må påtage sig rollen som modelkritik-eksponenten, når modelanvendelsen primært sker i relation til andre fagområder? Et svar kunne være, at det er fordi det er matematikeren der udstyrer eleverne med det kraftige værktøj. Af samme grund skal historielæreren påtage sig rollen som kildekritik-eksponenten. Når en person i en eller anden sammenhæng bruger et stykke arbejde eller teori, skal vedkommende være i stand til kritisk at kunne forholde sig til det. Når en person fx. i fysik eller matematik benytter historisk litteratur, eller prøver at forstå førtidige teoretikeres argumenter, må de forholde sig kritisk hertil; dvs. forstå den tidstypiske tænkemåder, samfundsopbygning etc. Ansvaret for en sådan kompetence ligger helt naturligt i historiefaget. På samme måde ligger ansvaret for en kritisk demokratisk anvendelseskompetence af matematisk karakter i matematikundervisningen, selvom den principielt aktiveres i ikke-matematiske fag.

Studieforberedelse

I langt højere grad end nogensinde før, indgår matematik på gymnasialt niveau i forskellige anvendelser. I billedet af det post-industrielle samfund, er arbejdsopfattelsen skiftet fra et industrielt til et proffessionelt. Stadig flere får fx. gennem regneark o.lign. brug for at kompetent at kunne vurdere anvendelser af matematik og selv opstille modeller til småanalyser etc. i ellers ikke-matematik-tunge sammenhænge.

I de matematiktunge videregående uddannelser, må det være en afvejningssag hvorvidt modellering eller mere ren matematik er hensigtsmæssig at prioritere mest. Det står imidlertid fast, at modellering har væsentlige potentialer ift. det studieforberedende aspekt også.

Del III

En analyse af de kognitions-psykologiske aspekter

Kapitel 7

Introduktion til del III

7.1 Fra teorier om læring til kognitiv psykologi

I denne del af rapporten fortsætter vi analysen af, hvilke potentialer man kan sige, problemløsning og modellering har som element i matematikundervisningen. Nu vælger vi at basere analysen på resultater fra *kognitiv psykologi*. I forhold til helt bredt at tage teorier om læring som udgangspunkt, ligger der heri to væsentlige afgrænsninger.

7.1.1 Læring vs. kognition

Den ene afgrænsning vedrører emnet. *Kognition* er en samlet betegnelse for de *intellektuelle funktioner*, som hjernen udfører. Det drejer sig bla. om funktioner som tænkning, sprog, hukommelse, forståelse og problemløsning. Funktioner som disse repræsenterer imidlertid kun den ene halvdel af, hvad der er bestemmende for hvilken form for læring, der finder sted i en given situation. Den anden halvdel udgøres af det *affektive* domæne, som dækker alle *følelsesmæssige funktioner* som angst, glæde, mismod, afmagt, tilfredshed, frustration, kedsomhed, entusiasme, osv.. Hvilke af disse følelser, den lærende oplever, er man med tiden blevet klar over er helt afgørende for udbyttet af en given undervisning. Ved ikke at analysere denne side af problemløsning og modellerings rolle i matematikundervisningen, er vi derfor velvidende om, at vi mister muligheden for på baggrund af analysen at komme med et samlet bud på brugen af problemløsning og modellering:

> "Analyses that focus solely on individual children's construction of matematical knowledge tell only half of a good story. The issue that needs to be addressed is the form that the process of

mathematical acculturation should take and how it can be coordinated with what is known about the cognitive processes by which individuals construct mathematical knowledge" [Cobb 89, p. 34].

At vi ikke gennemfører en analyse med udgangspunkt i de affektive faktorer, skal derfor ikke tages som udtryk for en manglende erkendelse af betydningen heraf. Det skyldes ene og alene, at vi—som nævnt i afsnit 1.2.1—af hensyn til tid og kræfter er nødt til at afgrænse analysens udgangspunkt, og i den henseende har erfaret, at der godt kan komme værdifulde bidrag ud af en analyse af de kognitive faktorer alene.[1]

7.1.2 Psykologi vs. kognitiv psykologi

Den anden afgrænsning vedrører vores valg af psykologi som den teoretiske "angrebsvinkel". Psykologi er nemlig i dag blot en af mange videnskabelige discipliner, der beskæftiger sig med kognitive processer, hvorfor det kun at anlægge et psykologisk perspektiv er udtryk for et nødvendigt fravalg af mange andre relevante tilgange. Det er derfor relevant at karakterisere, hvad der ligger—og ikke ligger—i netop en psykologisk tilgang.

For at indkredse hvilke problemfelter og arbejdsmetoder, der karakteriserer kognitiv psykologi, vil vi give et kort rids af, hvordan psykologis udvikling som videnskab hænger sammen med opblomstringen af interessen for kognitive processer i løbet af 60'erne.

Psykologi som videnskab

Psykologi er som videnskabelig disciplin groet frem af filosofi, og betragtes som sådan kun som værende fra omkring 1860. De første ca. 50 år blev der eksperimenteret med at studere den menneskelige bevidsthed, ved at lade forsøgspersoner fortælle om deres oplevelser under varierende forsøgsbetingelser, såkaldt *introspektion*. Denne metode til at studere menneskets kognitive funktioner blev dog aldrig bredt accepteret. De første knap 100 år af den psykologiske videnskabs historie som selvstændig disciplin kan derfor bedre karakteriseres ved, at man primært fokuserede på *adfærd* snarere end på kognitive processer. Man forsøgte at finde systematiske sammenhænge mellem perceptuelle (sansemæssige) input og handlemæssigt output. Hvad der skete herimellem blev betragtet som en fascinerende "sort boks", der desværre var utilgængelig for videnskabelig udforskning [Gade 97, pp. 93–96].

[1] Hvilket vi—som bemærket i afsnit 1.2.1—forestiller os i mindre grad er tilfældet hvad angår de affektive forhold.

Den dominerende "skole" indenfor den adfærds-baserede forskningstradition var og er *behaviorismen.* En af "the founding fathers", John Watson, forklarer grundopfattelsen således:

> "Psykologi som behavioristen ser det, er en rent objektiv naturvidenskab. Dens teoretiske mål er forudsigelse og kontrol af adfærden. Introspektion er ikke nogen væsentlig del af dens metode, og den videnskabelige værdi af dens data er ej heller afhængig af om de kan tolkes bevidst. Behavioristen søger en overordnet og fælles forklaring på dyrs adfærd og anerkender heri ingen skillelinje mellem menneske og dyr. Menneskets adfærd, med alle dens raffinementer og kompleksiteter, er kun en del af behavioristens undersøgelsesprogram" (oversat og gengivet i [Gade 97, pp. 96–97].

Et godt eksempel på denne måde at arbejde på er den russiske fysiolog Ivan Pavlovs berømte forsøg med hunde. Pavlov demonstrerede, at man kan kontrollere adfærden hos dyr med en vis intelligens, ved på passende vis at stimulere dem, når de opfører sig i retning af det, man ønsker. En sådan høj grad af forudsigelse og kontrol af adfærd er karakteristisk for behaviorismen, og er en væsentlig forklaring på den succes, den opnåede.

I en læringsmæssig kontekst lægger den behavioristiske tilgang vægt på at tilrettelægge undervisningen, så eleverne "formes" til at kunne udføre givne handlinger. Dette sker bedst ved såkaldt "programmeret instruktion", hvor hver type indsigt eller beregningsmæssig formåen inddeles i mindre dele, som eleverne så med passende stimulans kan guides igennem skridt for skridt, for til sidst at mestre helheden. Den læringsmæssige hypotese, som denne fremgangsmåde baserer sig på, er, at den rette sekvens af erfaringer, repeteret med passende frekvens, genererer den rette læring.

Om den udfordring, en sådan tilgang efterlader til undervisere og tilrettelæggere af en bestemt faglighed som fx. matematik, siger Schoenfeld:

> "Thus, the bulk of one's attention should be on analysis of subject matter. Gagné [pioneren på området] focused on constructing careful *task analyses*, which entails decomposing the material to be learned into small building blocks that are mastered individually and later combined into larger units of competency" [Schoenfeld 87b, p. 5].

Med det kendskab, vi har til den strukturalistiske interne fagopfattelse bag "den nye matematik", er det derfor nærliggende at forestille sig, at tilhængere af "programmeret instruktion" har bakket op om bestræbelserne på

at introducere en stærkt hierarkisk matematikundervisning, da det alt andet lige letter arbejdet med at "dekomponere" de enkelte matematiske færdigheder, der efterstræbes. At en sådan opsplitning ikke fremmer den helhedsorienterede ide bag strukturalismen, understreger blot nødvendigheden af, at en faglig omstrukturering forløber parallelt med en pædagogisk nytænkning, hvilket altså ikke var tilfældet for 60'er-matematikkens vedkommende.

Selv om behaviorismen repræsenterede den bredest accepterede forskningsmetode i tiden før Anden Verdenskrig, blev der også gennemført forskning med direkte interesse for de kognitive funktioner i denne periode. Blandt andet var der en række indflydelsesrige enkeltpersoner, der arbejdede i denne periode, og hvis resultater har fået varig betydning. Jean Piaget forsøgte på grundlag af en række eksperimenter at beskrive børns kognitive udvikling. Sammen med Jerome Bruners arbejde vedrørende betydningen af forskellige måder at repræsentere begreber på, blev Piagets arbejde brugt til at legitimere indførelsen af "den nye matematik" i folkeskolen, hvilket i sig selv er en interessant historie. Men da Piagets beskrivelser kun omhandler børn under teenage-alderen, har vi—med vores fokus på det gymnasiale niveau—valgt at lægge arbejdsindsatsen andre steder, og har derfor placeret dette arbejde i "det-må-vi-have-til-gode-til-en-anden-gang-bunken."

Mere relevant for vores fremstilling er den nok væsentligste samlede opposition til behaviorismen før Anden Verdenskrig; *gestalt-psykologien*[2]. Grundtanken her var, at vi som mennesker opfatter i helheder og reagerer som helheder, og at disse helheder er mere end summen af de enkelte dele. Grundlæggende mente gestalt-psykologerne, at de "mentale strukturer" er alt for komplekse til, at det giver mening kun at analysere forholdet mellem stimulus og respons. Man måtte forsøge at analysere, hvordan hjernen bearbejder de sanseindtryk, den modtager. Selv argumenterede gestalt-psykologerne for, at hjernen på basis af stort set medfødte egenskaber organiserer sanseindtryk, så "det samlede billede" bliver mest harmonisk og giver størst mulig mening, en teori de formulerede i de såkaldte Gestalt-love [Gade 97, pp. 177-80].

I forhold til læring betød grundtanken om opfattelse i helheder og teorien om hjernens "menings-søgende" funktion, at behavioristernes ide om "programmeret instruktion" blev forkastet. Schoenfeld omtaler i [Schoenfeld 87b, pp. 3–4] en klassisk gestalt-psykologisk fremstilling af Max Wertheimer fra 1945; *Productive Thinking*. Her argumenterer Wertheimer for, at selv om

[2]Navnet kommer fra, at disse psykologer arbejdede med opfattelsen af en figur ift. dens baggrund. De kaldte figuren for en "gestalt", hvormed de mente en organiseret helhed. En klassisk illustration af det komplekse i forholdet mellem figur og baggrund er Rubins vase, der enten kan ses som en hvid vase på en sort baggrund, eller som to sorte ansigter (der i det første tilfælde danner konturerne af vasen) på en hvid baggrund. Se evt. [Gade 97, pp. 177–78].

elever undervist efter den behavioristiske model nok lærer at "mestre" visse procedurer, så er der tale om overfladisk udenads-lære. Og viden opnået på denne vis vil højst sandsynligt hverken være fleksibel eller brugbar i en række forskelligartede situationer. Han giver som et af flere eksempler, at mange elever, der blev betragtet som mestrende aritmetikken, ikke forstod meningen med disse procedurer, og derfor udregnede

$$\frac{857 + 857 + 857 + 857 + 857}{5}$$

ved møjsommeligt at addere de fem identiske tal i tælleren, og så dividere resultatet med fem, hvilket unægteligt er helt overflødigt, hvis man forstår, hvad division er.

Gestalt-psykologiens store minus var, at den ikke indeholdt nogen ledsagende teori om undervisning. Selv om dens mål om en dybere begrebsforståelse som vi skal se er magen til, hvad meget senere kognitions-psykologisk forskning påpeger som en central pointe, så var deres fremstilling udelukkende beskrivende, og ikke konstruktiv ift. hvordan disse mål kunne nås, og deres program blev aldrig ført til ende [Schoenfeld 87b, p. 4].

Den kognitive revolution

Sidst i 40'erne var der en stigende erkendelse af, at behaviorismen var for indsnævrende. Flere og flere mente som gestalt-psykologerne, at det var nødvendigt at forsøge at åbne den "sorte boks" ved at analysere emner som tænkning og sprog og begreber ifm. mentale repræsentationer, hvorfor kognitiv psykologi fra sidst i 50'erne var almindeligt accepteret som forskningsfelt. Den samlende ide, der kom til at konstituere dette nye paradigme, blev at analysere menneskets evne til *informations-behandling*: Den information, som hjernen modtager, forsøgte man fra forskellige indgangvinkler at følge fra sanserne over perception[3], opmærksomhed og hukommelse til vidensrepræsentation og handling [Gade 97, p. 98].

Ideen om informations-behandling som tilgang til analyser af menneskets kognitive funktioner satte gang i en udvikling inden for flere beslægtede videnskabelige discipliner. Inden for både *antropologi*[4] og *lingvistik* (sprogvidenskab) dannedes forskningsfelter med speciale i de kognitive funktioner knyttet til informations-behandling[5], og med basis i matematik og logik samt

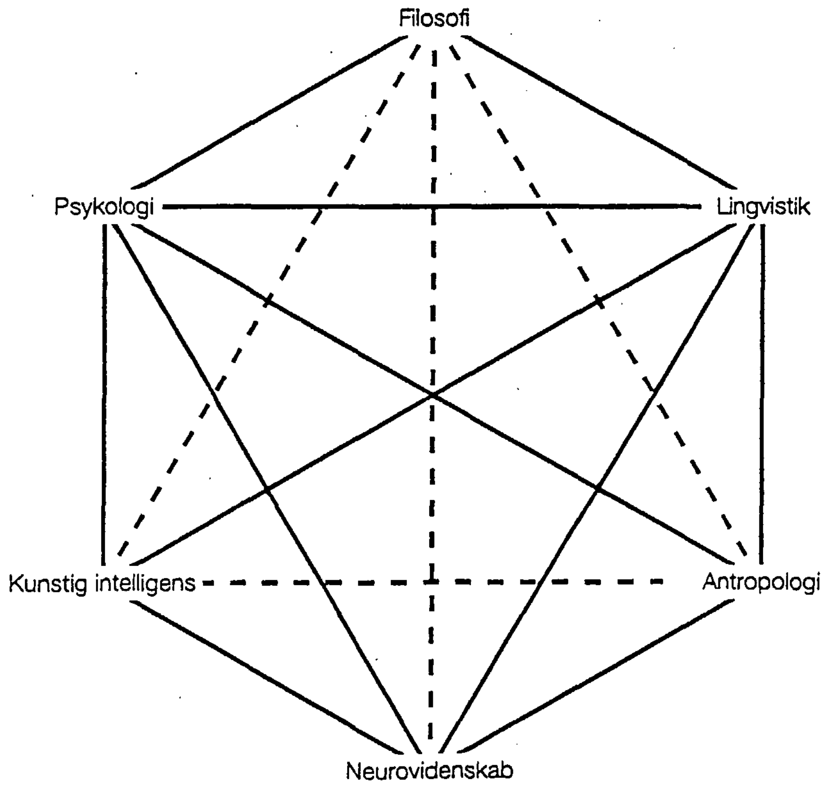
[3]Bearbejdning af emner umiddelbart fremkaldt ved sansepåvirkning.

[4]Studiet af menneskeracens fysiske karakteristika og kulturelle identitet.

[5]Meget af interessen samlede sig om forholdet mellem sprog og tanke: Er vores sproglige udtryksmuligheder bestemmende for, hvordan vi ser og opfatter verden, eller er sproget blot en måde at lette kommunikationen med andre på, og således uden dominerende indflydelse på vores måde at tænke på? Se evt. [Gade 97, p. 308ff.].

fremkomsten af de første computere, opstod *kunstig intelligens* som et helt nyt forskningsfelt. Desuden har der, længe før disse videnskaber entrede "scenen", været interesse for de kognitive funktioner på et overordnet plan inden for *filosofi*, og på en meget direkte måde indenfor *neurologi*, der beskæftiger sig med nervesystemets—herunder hjernens—fysiologiske opbygning og funktionsmåde. Også her begyndte man at interessere sig for informationsbehandling.

Grænserne mellem disse parallelle udviklinger er ifølge Anders Gade [Gade 97, p. 104] med tiden blevet mere og mere udvisket, og man arbejder i stigende grad på tværs af de videnskabelige discipliner, og lader interessen for de kognitive funktioner være samlingspunktet. Det er på denne baggrund man er begyndt at tale om *kognitionsforskning*, illustreret som den "kognitive sekskant" i figur 7.1.



Figur 7.1 *Den kognitive sekskant.* Diagram af de videnskabsgrene som indgår i kognitionsforskning. Fuldt optrukne linjer angiver stærke tværvidenskabelige bånd, mens stiplede linjer angiver svagere bånd. Fra [Gade 97, p. 105].

Udover interesse for de kognitive funktioner bygger de forskellige tilgange til kognitionsforskning også på de samme videnskabelige grundantagelser, som er med til at karakterisere og afgrænse forskningsområdet:

> "A basic assumption underlying work in cognitive science is that mental structures and cognitive processes (loosely speaking, 'the things that take place in your head') are extremely rich and complex—but that such structures can be understood, and understanding them will yield significant insights into the ways that thinking and learning take place" [Schoenfeld 87b, p. 2].

Anders Gade nævner [Gade 97, p. 106] endnu et karakteristika for kognitionsforskning, som implicit fremgår af den kraftige emnemæssige fokusering, men som nok er værd at gøre eksplicit: Kognitionsforskere er enige om, at nogle faktorer som ganske vist er væsentlige for kognition, alligevel indtil videre må udelades eller nedtones, fordi de ellers ville komplicere forskningen unødvendigt. Det væsentligste forsømte område er de førnævnte affektive forhold, men også betydningen af historiske og kulturelle forhold negligeres.

Hvad angår arbejdsmetoden er der ifølge Schoenfeld sket et markant skift i løbet af kognitionsforskningens godt 40-årige historie [Schoenfeld 87b, pp. 7–9]. Fra starten i 50'erne og frem til sidst i 70'erne arbejdede man overvejende naturvidenskabeligt inspireret: Mange forsøgspersoner underkastet varierende forsøgsbetingelser, og deraf følgende store data-mængder, som man så analyserede vha. statistiske metoder. Det var og er den metode man benytter i videnskabelige eksperimenter, hvor de indgående variable størrelser kan underlægges kontrol udefra.

At benytte metoder som disse i kognitionsforskning forudsætter imidlertid en tro på, at forskelle i den læringsmæssige "behandling" viser sig som statistisk signifikante forskelle i efterfølgende test-resultater. En så forsimplet tilgang til læringsprocesser viste sig imidlertid mere og mere uholdbar, efterhånden som flere og flere forskningsresultater blev publiceret uden at give indtryk af nogen øget forståelse. Fra midt i 70'erne var der derfor flere og flere forskere der anbefalede, at man gik over til at fokusere på den *proces*, det enkelte *individ* gennemgår ifm. forskellige intellektuelle udfordringer, hvilket fra sidst i 70'erne og frem har været den dominerende forskningsmetode:

> "Analyses in cognitive science tend to be very detailed. They focus on cognitive processes in an attempt to explain what produces 'productive thinking.' And because the studies are often carried out in tremendous depth, the number of 'subjects' in those studies is often quite small" [Schoenfeld 87b, p. 2].

7.2 Kognitiv psykologi og vores analyse

Den beskrevne udvikling har gjort, at der er sket en opsplitning af kognitiv psykologi som videnskabeligt arbejdsområde, så man kan tale om i hvert fald fire hovedlinjer [Gade 97, p. 106]:

1. *Eksperimentel kognitiv psykologi*, som stadig anvender eksperimenter med udvalgte forsøgspersoner som den grundlæggende forskningsmetode.

2. *Kognitiv modellering vha. computere*, som på grundlag af computerberegninger forsøger at danne såkaldt komputationelle modeller, der simulerer hjernens kognitive processer.

3. *Kognitiv neuropsykologi*, som danner og tester modeller af hjernens struktur på grundlag af intakte og skadede færdigheder hos neurologiske patienter.

4. *Kognitiv neurovidenskab*, som vha. moderne scannings-metoder undersøger, hvordan både raske og syge hjerner arbejder ifm. forskellige kognitive eksperimenter.

I vores søgen efter potentialer ved at arbejde med problemløsning og modellering i matematikundervisningen, bruger vi resultater fra den første og den sidste af disse kategorier. Computer-simuleringer har vi dels ringe forudsætninger for at gå ind i en diskussion af, dels har flere psykologer, vi har snakket med, givet udtryk for, at denne tilgang efter at have været den dominerende i 70'erne nu er omgærdet af en vis skepsis i psykolog-kredse, og primært bruges af forskere med interesse for computerens og ikke hjernens muligheder. Kognitiv neuropsykologi er—som det er afgrænset her—uinteressant for os alene af den grund, at det vedrører defekter i hjernen og ikke normalt fungerende hjerner.

Vi vil således i kapitel 8 fremlægge centrale resultater fra såvel eksperimentel kognitiv psykologi som kognitiv neurovidenskab, for i kapitel 9 at kunne diskutere, hvilke konsekvenser vi mener disse resultater har ift. problemløsning og modellering.

Kapitel 8

Kognitions-psykologiske modeller for vidensrepræsentation

I dette kapitel forsøger vi at fremlægge de teoretiske ideer, som vi har valgt at lægge til grund for næste kapitels kognitions-psykologiske analyse af, hvad der karakteriserer og skaber "produktiv tænkning". Det mest centrale begreb at få karakteriseret i den sammenhæng er *forståelse*: Alle normale voksne mennesker ved fra egne erfaringer, hvordan det føles at have forstået noget. Men hvad der udgør *forskellen* på at have og ikke at have forstået noget, har de færreste en ide om. Hvordan kan vi fx. karakterisere forskellen på den måde du—med en følelse af at forstå, hvad der foregår—udfylder selvangivelsen, og den måde en person uden denne følelse af forståelse gør det på. At sammenligne det ydre produkt af anstrengelserne; de færdigudfyldte selvangivelser, er ikke svaret. De kan sagtens være ens selv om den forståelse, der ligger bag, ikke er det.

Den teoretiske ramme, som vores diskussion foregår indenfor, bygger på en central antagelse: Mens *kommunikation* med andre kræver, at der eksisterer *eksterne repræsentationer* i form af konkrete objekter, billeder eller mere abstrakte symboler som fx. navne (det gælder såvel konkrete fysiske objekter som hængekøje, familie og matematiklærer, som abstrakte—fx. matematiske—ideer som harmoni, kærlighed og differentialkvotient), så forudsætter *tænkning*, at der eksisterer tilsvarende *interne repræsentationer* i hovedet på den enkelte, og tænkningen giver sig udslag i, at disse interne repræsentationer er *strukturerede* [Hiebert 92, Skemp 86].

En sådan tilgang til studiet af kognitive funktioner, er den moderne kognitions-psykologis naturlige forlængelse af gestalt-psykologernes fokusering på tankeprocesser. Ideen om at mennesker fortolker den oplevede virkelighed frem for at absorbere den, såkaldt *psykologisk konstruktivisme*, er således ikke ny, jvf. [Ernest 91, pp. 102–103] og [Schoenfeld 87b, pp. 20–24].

Den kognitive psykologis bidrag de sidste knap 30 år består i, at man nu har opstillet og eksperimentelt afprøvet detaljerede modeller for, hvordan konstruktionen og repræsentationen af viden kan tænkes at foregå, så man nu er enige om, at valget står mellem to modeller med mange ideer til fælles [Hiebert 92, p. 67]. Det er disse modeller, vi nu vil skitsere hovedtrækkene i, inden vi i afsnit 8.3 ser på, hvilke bidrag til forståelsen neurovidenskabens direkte studier af hjernen kan give.

8.1 Kognitive modeller af begrebsdannelsen

De modeller for begrebsdannelse, vi her vil præsentere, bærer tydeligt præg af at være udviklet under informationsbehandlings-paradigmet. Det er den *information*, vi får ud af at interagere med omgivelserne, der repræsenteres internt, ikke omgivelserne selv. Der er derfor tale om *symbolske* repræsentationer, hvor et symbol er et mønster i hukommelsen som står for eller refererer til noget uden for sig selv, det være sig i omgivelserne eller i andre dele af hukommelsen.

Kognitive psykologer skelner i den forbindelse mellem hhv. *analoge* og *propositionelle* symbolske interne repræsentationer [Gade 97, p. 101]. Analoge repræsentationer kan fx. være billeder for det "indre blik" af en bestem person eller ting, eller det kan være repræsentation i form af en lyd eller duft. Tænk for eksempel på, hvilken form for erindring du får "slået an", når ord som "bedsteforældre", "kæreste" eller "lyn" nævnes. Det vil nok primært være analoge repræsentationer som hhv. "duften af en bestemt pibetobak og dagligstuen set fra sofaen", "smilet og lydene når I ... vasker hænder" og "lysglimt i mørke og høj buldren", snarere end "de to personer der har født min far/mor", "den person jeg deler hjem og seng med" og "lysglimt fremkaldt af elektrisk udladning mellem skyer og jord".

Sidstnævnte former for erindring ville være dominerende, hvis "bedsteforældre", "kæreste" og "lyn" havde karakter af propositionelle repræsentationer, hvilket for de fleste ikke er tilfældet. Det gælder derimod ord, der betegner ideer eller begivenheder, som fx. "demokrati" eller "Anden Verdenskrig", da de—snarere end billeder, lyde eller dufte—giver diskuterbare (propositionelle) erindringer om den relative placering i en eller anden sammenhæng. Med eksemplerne "demokrati" og "Anden Verdenskrig" kan det fx. være "styreform hvor alle har *lige meget* indflydelse" og "Krig der fandt sted *i perioden* 1939–45".

Vi beskæftiger os her kun med propositionelle repræsentationer, hvilket bla. skyldes, at det—som eksemplerne gerne skulle indikere—er at "skille hovedet fra kroppen" at diskutere analoge repræsentationer uden at inddrage de

affektive forhold, hvilket vi som nævnt har afgrænset os fra. Indholdsmæssigt kan dette fravalg imidlertid også begrundes med, at propositionel repræsentation er et karakteristisk træk ved ord, som repræsenterer abstrakte matematiske ideer som "strukturalisme" og "differentialkvotient". For eksempel vil vi som matematiklærere direkte betragte det som udtryk for en fejlopfattelse, hvis "differentialkvotient" hos en elev frembringer billedet

$$f'(x)$$

uden at denne analoge repræsentation har en propositionel pendent.

8.1.1 En model baseret på hierarkisk begrebsdannelse

En udbredt tilgang til, hvordan hjernen propositionelt repræsenterer og systematiserer de millioner af informationer, den dagligt modtager fra sanseapparatet, er at forestille sig, at det sker gennem såkaldt *hierarkisk begrebsdannelse.*

Begrebsdannelse

Lad os starte med at se på, hvordan det enkelte begreb dannes. Den grundlæggende ide til hvordan det sker, bygger på en konstatering af, at vi som mennesker har en evne til at *abstrahere* fælles egenskaber blandt de forskellige ting eller situationer, vi oplever, og konstant og uopfordret forsøger at *klassificere* nye indtryk svarende hertil.

At det forholder sig sådan er tydeligt at se ved at observere mindre børn, der oftere end voksne klassificerer på en ukonventionel måde, der springer i øjnene, fordi deres erfaringsgrundlag endnu ikke er så udbygget. Skemp [Skemp 86, p. 19] nævner som eksempel, at et barn på to år, der første gang ser en baby kravle henover gulvet, kan finde på at gå hen og stryge babyen over ryggen og klappe den på hovedet, som om det var en hund. Hvorfor? Fordi den to-årige har set adskillige hunde i sit liv, og på den baggrund abstraheret "bevæge sig på fire ben" som en definerende egenskab ved hunde. Alle nye indtryk, der har denne egenskab, inklusive en kravlende baby, klassificeres derfor som værende en hund, og behandles derefter.

Den centrale antagelse i modellen er så, at processen med at abstrahere og klassificere medfører *varige mentale ændringer*, ved at de fællestræk, der abstraheres ud af den større sammenhæng, får en selvstændig repræsentation i hjernen. Herved er der dannet et nyt *begreb*:

> "*Abstracting* is an activity by which we become aware of similarities (in the everyday, not the mathematical, sense) among our

> experiences. *Classifying* means collecting together our experiences on the basis of these similarities. An *abstraction* is some kind of lasting mental change, the result of abstracting, which enables us to recognize new experiences as having the similarities of an already formed class. Briefly, it is something learnt which enables us to classify; it is the defining property of a class. To distinguish between abstracting as an activity and an abstraction as its end-product, we shall hereafter call the latter a *concept*" [Skemp 86, p. 21].

Anna Sfard opererer med en lignende tredeling af processen frem mod begrebsdannelse [Sfard 91, p. 16ff.]. Hun betegner de tre faser som hhv. interiorization, condensation og reification. Som et vigtigt bidrag til model-forståelsen betoner hun, at de to førstnævnte faser er væsensforskellige fra den sidstnævnte: Både interiorization og condensation er udtryk for *processer*, som den lærende arbejder sig igennem, mens reification er udtryk for et "spring" i bevidsthedsniveauet.

Ved interiorization "vænner" man sig således gradvist til en bestemt måde at *internalisere* nye erfaringer på, mens condensation udtrykker fortsættelsen af denne proces frem mod en opfattelse af disse erfaringer som et "hele"; erfaringerne *kondenseres*, så kun fællestrækkene forbliver tilbage. Begge disse former for intern repræsentation sker i forbindelse med, at man "bearbejder" de nye indtryk mentalt, og er derfor noget der uundgåeligt tager et vist stykke tid. Kondenserings-fasen varer så længe et eller flere nye indtryk stadig internt er tæt knyttet til en sådan bearbejdning. Fra et vist tidspunkt vil det imidlertid ikke længere være tilfældet; fællestrækkene er blevet repræsenteret som et *selvstændigt* begreb. Det er denne momentane "løsrivelse" fra erfaringsgrundlaget, Sfard betegner reification. Begrebsdannelse, som vi mere mundret vil bruge synonymt med reification, er således defineret som et ontologisk skift; en pludselig evne til at se noget velkendt i et helt nyt lys. Med Anna Sfards egne ord:

> "Thus, whereas interiorization and condensation are gradual, quantitative rather than qualitative changes, reification is an instantaneous quantum leap: a process solidifies into object, into a static structure. Various representations of the concept become semantically unified by this abstract, purely imaginary construct. The new entity is soon detached from the process which produced it and begins to draw its meaning from the fact of its being a member of a certain category. At some point, this category rather than any kind of concrete construction becomes the ultimate base for claims on the new object's existence" [Sfard 91, p. 20].

Eksempler

Lad os se på to eksempler Sfard nævner, der illustrerer sammenhængen mellem modellens tre faser i begrebsdannelsen.

Hvis en person har dannet begrebet "negative tal", så kan *internaliseringen* bestå i, at vedkommende bliver gradvist mere sikker i subtraktion som en isoleret aktivitet. *Kondenseringen* kan som en naturlig fortsættelse heraf bestå i, at vedkommende arbejder sig frem mod at kunne udskille det karakteristiske ved subtraktion ift. addition, multiplikation, osv., ved at kunne gennemføre aritmetiske manipulationer med stadig større kompleksitet; først kun med addition og subtraktion af positive tal, så med multiplikation inddraget, så med addition og subtraktion af både positive og negative tal, osv.. Springet til at kunne betragte "negative tal" som et *selvstændigt begreb* er så sket, når vedkommende kan betragte negative tal som en ægte delmængde af de hele tal *uafhængigt* af aktiviteten "subtraktion".

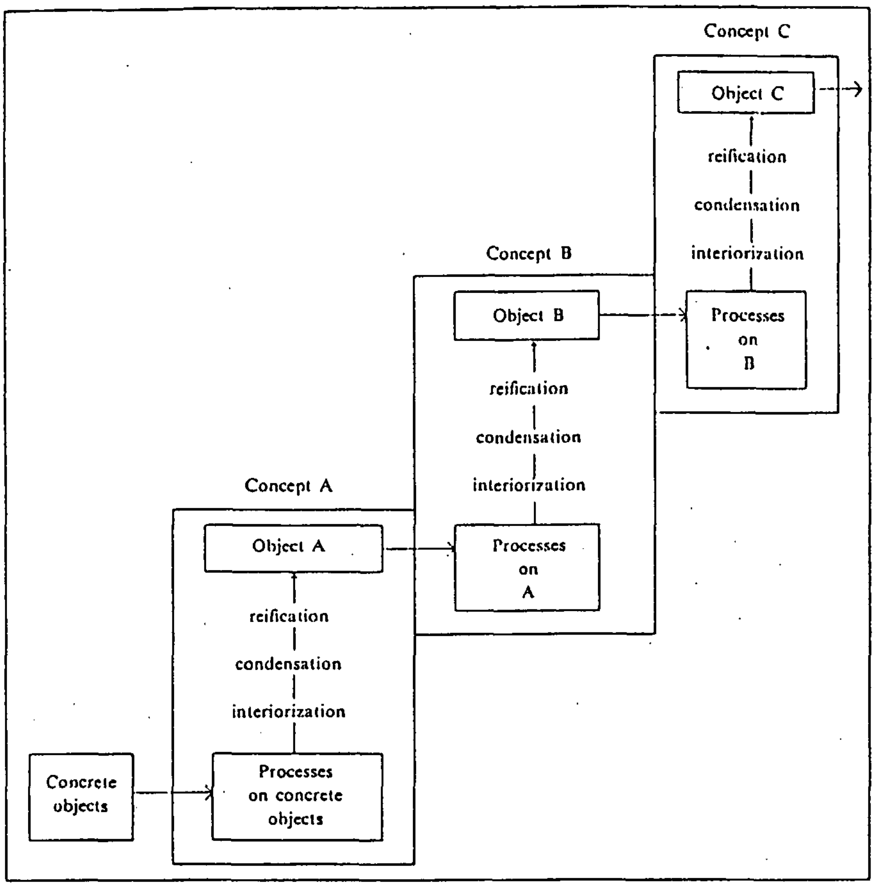
I forbindelse med begrebet "funktion" består *internaliseringen* bla. i, at blive gradvist mere sikker i vha. en regneforskrift at udregne værdier af den afhængige variabel for givne værdier af den uafhængige variabel. *Kondenseringen* består i dette tilfælde i at blive sikrere og sikrere i at operere med funktioner uden at interessere sig for specifikke værdier af den uafhængige variabel. Operationerne kan fx. bestå i at tegne grafer, multiplicere og dividere funktionsudtryk med hinanden, samt finde sammensatte og inverse funktionsudtryk. At "funktion" er dannet som selvstændigt begreb kan fx. vise sig ved evnen til at løse ligninger, hvor et funktionsudtryk er den variable størrelse, fx. differentialligninger, eller ved at kunne *fortælle* om de generelle egenskaber ved og processer udført med funktioner, der under kondenseringsfasen kun eksisterede som handle-kompetencer.

Begreber som grundlag for nye begreber: En hierarkisk struktur

Begreber, der på basis af "trefase-modellen" er abstraheret direkte fra umiddelbare sanse-erfaringer, kaldes *primære begreber.* Fra disse begreber kan vi så abstrahere begreber af højere orden, som så igen kan danne grundlag for begreber af endnu højere orden, etc., hvilket ordner begreber i forskellige hierarkier. "Af højere orden end" betyder abstraheret fra, direkte eller indirekte. "Mere abstrakt" betyder her "fjernere fra direkte sanse-erfaringer", hvilket passer med hverdagsbetydningen af ordet "abstrakt". På figur 8.1, der er en illustration af ideen om hierarkisk begrebsdannelse, vokser abstraktionsniveauet jo højere op man kommer i "kæden" af begreber.

En karakteristik som denne af forholdet mellem flere begreber giver selvfølgelig kun mening, hvis begreberne tilhører samme hierarki. Fx. kan vi ikke

ud fra disse retningslinjer sammenligne "A-dur" med "rød", selv om de fleste nok vil betragte "A-dur" som mest abstrakt [Skemp 86, p. 24].



Figur 8.1 Generel model af hierarkisk begrebsdannelse. Fra [Sfard 91, p. 22].

Hierarkisk begrebsdannelse og brugen af definitioner

Et umiddelbart resultat af at betragte begreber som hierarkisk ordnede er, at der er en modsætning mellem, hvordan et begreb opfattes mens der arbejdes med at danne det, og hvordan det opfattes *efter* det er dannet: Så længe der arbejdes med begrebsdannelsen, er den aktive bearbejdning af specialtilfælde for de fleste et nødvendigt udgangspunkt, fx. i form at operationer med andre mindre abstrakte matematiske begreber, mens begrebet som selvstændigt velafgrænset objekt er et fjernt mål at stræbe efter. Efter dette mål er nået, og begrebet har fået "eget liv", er det centrale netop at afgrænse begrebet så skarpt som muligt fra andre beslægtede begreber, hvilket indenfor matematikkens verden er den rolle en *definition* har.

Lige så velanbragt definitioner er som hjælp til en skærpet afgrænsning *efter* et begreb er dannet, lige så ubrugelige er de imidlertid til at *indlede* begrebsdannelsen. At forsøge på denne vis at forcere processen, svarer til at forsøge at øge en persons omsætning af kulhydrater ved at tvinge ham til at sluge maden:

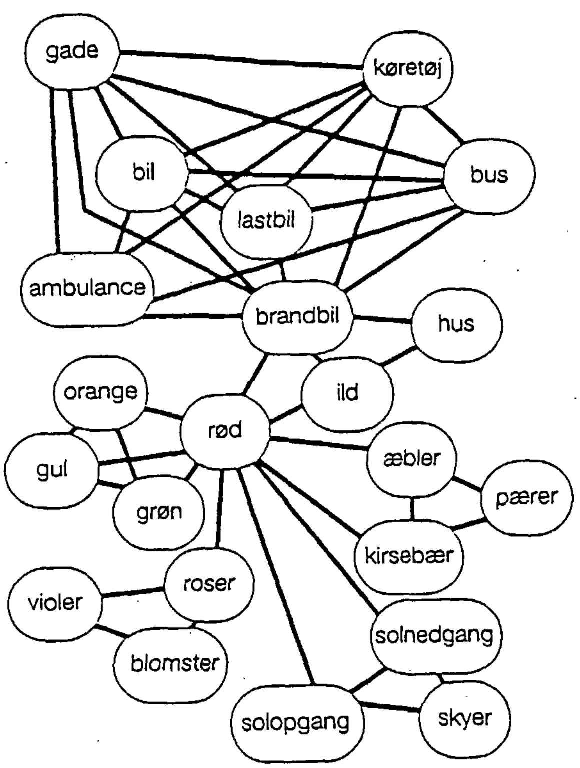
> "If the structural approach [det 'løsrevne' begreb] is more abstract than the operational [den aktive bearbejdning af specialtilfælde], if from the philosophical point of view numbers and functions are basically nothing but processes, if doing things is the only way to somehow 'get in touch' with abstract constructs—if all this is true, then to expect that a person would arrive at a structural conception without previous operational understanding seems as unreasonable, as hoping that he or she would comprehend the two-dimensional scheme of a cube without being acquainted with its 'real life' three-dimensional model" [Sfard 91, p. 18f.].

Skemp nævner som eksempel på det samme, hvordan man skal forklare en tidligere blind, der netop har fået synet igen, hvad "rød" er [Skemp 86, p. 23f.]. Et forsøg på en definition kunne være: "Rød er den farve vi oplever fra lys med bølgelængde i intervallet 0–6 mikrometer". Lige så nyttig en sådan definition kan være for en fysiker, lige så ubrugelig er den selvfølgelig for vores blinde ven. Der er ingen vej uden om at vise ham eller hende en masse ting med forskellige farver, og så—ved et nævne hvilke af tingene, der lever op til karakteristikken "rød"—lade vedkommende danne begrebet selv.

8.1.2 En model baseret på semantisk distance

Et alternativ til ideen om hierarkisk begrebsdannelse er den såkaldte *spreading activation teori* [Gade 97, p. 313ff.]. Den model af begrebsdannelsen, som teorien benytter sig af, har stort set samme udgangspunkt som den forrige hvad angår dannelsen af begreber fra umiddelbare sanseindtryk. Forskellen består i, at tanken om en hierarkisk struktur forkastes, og erstattes med en mere dynamisk struktur, hvor styrken af associationerne mellem de enkelte begreber svarer til den såkaldte *semantiske distance*, jvf. figur 8.2:

> "Ifølge denne model *aktiveres* det tilsvarende knudepunkt i den semantiske hukommelse når en person tænker på, ser eller hører om et begreb. Aktiveringen spreder sig så til andre begreber, kraftigst til de begreber som er semantisk tættest forbundne, og svagere til andre med større semantisk afstand" [Gade 97, p. 315].



Figur 8.2 "Spreading activation" netværk. Fra [Gade 97, p. 315].

8.2 Begrebsrelationer: Schema-teorien

Vi vil ikke her vælge mellem hvilken af de to modeller, vi tror giver den bedste beskrivelse af hjernens evne til at danne nye begreber, bla. fordi der pt. stadig ikke er enighed herom blandt forskere indenfor kognitiv videnskab. Flere steder, bla. [Hiebert 92, p. 67], nævnes det desuden, at der ikke er nogen grund til at man nødvendigvis skal vælge, da de to modeller for begrebsdannelse sagtens kan tænkes i praksis at supplere hinanden, hvilket i så fald blot understreger kompleksiteten i den interne vidensrepræsentation.

Vigtigere for, at vi ikke lægger vægt på at holde modellerne op mod hinanden er dog, at begge modeller er enige om det, der for os er det centrale, menlig at begreber er gensidigt forbundet vha. *meningsgivende relationer* mellem dem, og at disse relationer er styrende for, hvilke begreber der aktiveres samtidigt.

At det er tilfældet betyder, at egenskaberne ved en givet begrebs-struktur uanset valg af model ikke kan vurderes ved blot at "summere" meningsind-

holdet i hvert af de indgående begreber isoleret betragtet. Herved overses netop betydningen af begrebernes indbyrdes relationer, hvilket ofte er det afgørende for netop denne strukturs egenskaber ifm. udførelsen af de kognitive processer. Skemp [Skemp 86, p. 37] nævner som analogi, at det vel er de færreste, der på basis af viden om de separate egenskaber for transistorer, modstande, ledninger osv. kunne have forudsagt, at når disse dele forbindes på passende vis, resulterer det i muligheden for at høre radio-udsendelser.

For at understrege betydningen af at betragte en begrebsstruktur som et aktiverbart samlet hele, indføres betegnelsen *schemas* for sådanne strukturer:

> "A schema is an activated part of a semantic network. [...] Thus, a schema is always a representational, permanently modifiable unit, a meaning structure of a particular (although restricted) scope that represents actions, operations [...] or concepts" [Steiner 94, p. 250].

Et schema, eller—som vi vil kalde det—en *aktiveret semantisk struktur*, kan således sige at indeholde to ting: Dels en aktiveret viden om *meningsindholdet i en række begreber* fra et semantisk netværk, dels *regler eller algoritmer*, der fastlægger de korresponderende *forbindelser* mellem disse begreber, og som gør det muligt at de kan fungere som en integreret helhed.

8.2.1 Eksempler

Indenfor et domæne-specifikt område af en persons semantiske netværk som algebraisk matematisk viden, kan der fx. optræde begreber som "tal", "brøker", "ligninger", "funktioner", "mængder", "variable", osv., som hver især repræsenterer en viden om en masse konkrete eksempler på tal, brøker, osv.. Forbindelserne mellem disse begreber vil så inden for domænet bestå af matematiske operationer fra de simpleste hentet fra aritmetikken op til—for eksempel—operationer fra infinitisemalregningen som differentialer og integraler. En aktiveret semantisk struktur kan så fx. være knyttet til "ligningsløsning", forstået som at en person konfronteret med en ligning som for eksempel

$$4x - 3 = -1 + 2x$$

uopfordret vil aktivere begreber som "variabel", "konstanter" og "lighedstegn", og forbindelser som "lige så stor som", "af samme slags som", "på samme side af lighedstegnet som" og "kan forkortes til". En anden person vil måske—konfronteret med samme ligning—aktivere en semantisk struktur knyttet til "ligningsløsning" bestående af bla. begreberne "bogstaver", "tal" og "vippe", og forbindelserne "blandet sammen", "står alene", "samle sammen", "flytte

rundt på vippen uden at den tipper", osv.. Der kan således være stor forskel på, hvilken semantisk struktur den samme opgave aktiver hos to forskellige personer. Betydningen heraf ift. forskellige forståelsesmæssige "platforme" for videre læring, vender vi tilbage til senere.

På hvert sted i begrebsabstraktionen kan et givet begreb indgå som grundlag for abstraktion af begreber inden for mange forskellige domæner [Skemp 86, p. 37]. For eksempel vil begrebet "bil" for de fleste sammen med begreber som "bus", "tog" og "fly" være med til at konstituere begrebet "transportmiddel", og således konstruktivt aktiveres ifm. den semantiske struktur repræsenterende handlinger som "hvordan skal jeg bringe mig hen til ...". For nogle vil "bil" imidlertid også være klassificeret som "statussymbol", for en økonom som "importvare", for en mekaniker som "levebrød", osv., i hvert tilfælde med mulighed for, at "bil" aktiveres som en del af en ny handlingsbetinget semantisk struktur.

Eksemplet skal tjene til illustration af, at hvert enkelt begreb kan have *relationer* til mange andre begrebsstrukturer, og således blive aktiveret i mange forskellige kontekster.

Det gælder også mere abstrakte begreber. For eksempel vil et begreb som "variabel" for dig som matematik-kyndig blandt andet indgå i aktiverbare semantiske strukturer sammen med matematiske begreber som "funktion", "skalar", osv., hvorfor du kan bringe disse begreber i spil samtidigt, mens det for mange andre slet ikke eksisterer som begreb, og hvis det gør, så strukturelt sammenhængende med hverdagsrelaterede begreber som "renteniveau", "indkomst", mv..

Det samme gælder begrebet "funktion". At have dannet det som matematisk begreb betyder som nævnt tidligere, at man kan kan operere med det i forskellige sammenhænge, diskutere betydningen af inverse og sammensatte funktioner, mv.. Men for mange har begrebet "funktion" kun mening i sammenhænge som at "have en funktion på arbejdet", "foretrække funktionelt design", osv., hvorfor alene det at snakke om inverse og sammensatte funktioner virker absurd.

8.2.2 Sammenfatning

Sammenfattende kan vi forsøge at illustrere sammenhængen mellem et menneskes semantiske netværk af begreber og teorien om aktiverbare semantiske strukturer—schemas—med en metafor fra matematikkens verden:

Hvis vi betragter begreberne i et givet semantisk netværk som punkter i et tre-dimensionalt rum, og forbindelserne mellem disse begreber som linier mellem punkterne, så kan vi tænke på de aktiverbare semantiske strukturer som snitflader gennem rummet. Nogle steder i rummet vil en snitflade indeholde mange punkter og linjer, svarende til, at de domæner af det semantiske netværk, der "rammes" af snittet, rummer mange rigt forbundne begreber, andre steder færre. Også orienteringen af snitfladen spiller en rolle: Et snit gennem et givet punkt vil i visse retninger indeholde linier til mange andre punkter, i andre retninger måske slet ingen, svarende til, at der godt kan være mange forbindelser fra et begreb til begrebsstrukturer fra et bestemt domæne, samtidig med at det samme begreb ingen forbindelser har til begreber fra andre domæner. Hermed er også den sidste vigtige sammenhæng antydet: Der kan være mange—i princippet uendelig mange—forskellige snitflader gennem det samme punkt, svarende til, at hvert begreb kan indgå i mange forskellige aktiverbare semantiske strukturer.

8.3 Neurovidenskabens bidrag

Såvidt en modelbaseret analytisk tilgang, som indtil for ca. ti år siden var den altdominerende. Før da var neurologiens bidrag til forståelsen af *raske* menneskers kognitive funktioner i det store og hele begrænset til, at kunne udtale sig om hjernens helt overordnede struktur.

Vi har således tre hjerner; "krybdyrhjernen", "pattedyrhjernen" og "neocortex" (se [Gade 97, pp. 36–44] for en grundigere præsentation end den her givne). Krybdyrhjernen, eller hjernestammen, er en forlængelse af rygmarven, og er først og fremmest central ifm. *aggression*. I pattedyrhjernen ligger først og fremmest evnen til at have *følelser*; evnen til at være tiltrukket/frastødt af nogen. Størrelsen af neo-cortex, eller hjernebarken, er det der afgør muligheden for intelligent adfærd, fx. i form af kontrol med aggressioner og følelser. Det er således i forståelsen af neo-cortex' virkemåde og samspil med de to andre hjerner, vi skal lede efter et bidrag til udforskningen af de kognitive funktioner.

Når der for ca. ti år siden skete et gennembrud i forskningen heri med dannelsen af kognitiv neurovidenskab som forskningsfelt, hænger det sammen med udviklingen af en ny scannings-metode, der har gjort det muligt at se "direkte ind i" den normale arbejdende hjerne; såkaldt *positron emmisionstomografi* (PET) (cf. [Gade 97, p. 72ff.] og [Law 97]).

Der er to væsentlige ting at sige om neurovidenskabens bidrag til forståelsen af de kognitive processer. For det første, at det stadig er begrænset, hvad man kan sige om *processer* i hjernen, så længe man kun har statiske "før og efter-billeder" at vurdere det ud fra (hvilket er hvad PET-scanning kan levere), hvad neuro-psykologerne selv er de første til at sige. For det andet, at meget af det, man rent faktisk kan sige, bekræfter de antagelser om hjernens funktionsmåde, der er en central del af modellerne af begrebsdannelse. Vi vil

her kort omtale to sådanne forhold.

8.3.1 Den plastiske hjerne

Man opererer med forskellige niveauer at analysere hjernens funktioner på: Fra funktionelle systemer over repræsentationskort til neuroner, synapser og molekyler. Til forskellige psykologiske funktioner er forskellige niveauer mere relevante end andre. Ofte er det forskningsmæssigt interessante, om analyser af en given psykologisk funktion på flere forskellige niveauer giver resultater, der peger i samme retning.

Det, der i relation til undervisning er den interessante "fællesnævner" ved neurovidenskabelige undersøgelser på flere af disse niveauer, er at hjernen—ligesom musklerne—tilpasser sig ift. en ydre belastning som indlæring. Man snakker i den forbindelse om at hjernen er *plastisk* [Mogensen 97].

Læring ændrer det neurale netværk

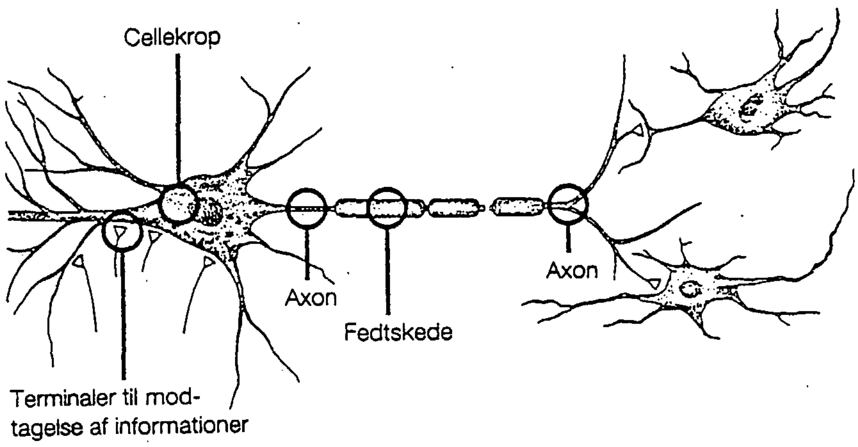
Den måde, man bedst kan forstå den plastiske hjerne på, er ved at se på, hvordan nervecellerne i hjernen er forbundet med hinanden, altså ved rent fysisk at se på det neurale netværk. Forskningen viser, at dette netværk ændres såvel strukturelt som funktionelt i forbindelse med indlæring.

Det centrale at forstå her er altså selve "ledningsnettet"; nervecellerne og synapserne. Under hver kvadratmillimeter af hjernebarkens overflade er der ca. 100.000 nerveceller i et kompliceret netværk af indbyrdes forbindelser; såkaldte synapser. Hver nervecelle er forbundet til ca. 10.000 andre på denne måde, jvf. figur 8.3. Ved brug af nervecellerne dannes synapser, således at der dannes særlig effektive veje imellem nerveceller der ofte er i spil sammen, og således at hver nervecelle forbindes med bestemte andre ved bestemte former for hjernearbejde [Mogensen 97]. Det bekræfter modellernes antagelse om, at forskellige former for viden—i modellerne repræsenteret ved forskellige sanseerfaringer—danner relationer ved at man processuelt opererer med dem.

Bestemte dele af hjernen ændrer størrelse

På et mere overordnet niveau end de enkelte nerveceller har man konstateret, at de områder af hjernen, som modtager sanseindtryk, er organiseret som en slags "kort" over kroppen eller omverdenen; såkaldte *repræsentationskort* [Gade 97, pp. 47–53].

Man har længe vidst, at disse "kort" var foranderlige i et barns første leveår, men indtil for få år siden troede man, at de hos voksne mennesker var



Figur 8.3 Skematisk tegning af typisk nervecelle med cellekrop og nervetråde. Der er mange korte nervetråde til modtagelse af informationer fra andre nerveceller og én lang celleudløber, et såkaldt axon, til afsendelse af informationer i form af nerveimpulser. Axonet forgrener sig før det danner kontakt til andre nerveceller. Kontaktpunkter—synapser—er angivet med trekanter. Til højre er vist to modtager-nerveceller af en anden type. Fra [Gade 97, p. 38].

faste og uforanderlige. Nye forsøgsresultater vha. PET-scanning har imidlertid anfægtet denne antagelse, så man nu regner med, at indlæring af en motorisk færdighed medfører, at en hjernedel af speciel betydning for denne færdighed direkte vokser. Ved intensiv træning af aber har man over nogle få uger målt størrelsesændringer på helt op til én centimeter.

Hvis resultater som disse kan overføres fra indøvelse af motoriske færdigheder til begrebsdannelse, kan det ses som en bekræftelse af den hierarkiske models antagelse om, at der faktisk "tilføjes" hjernen noget ifm. begrebsdannelse.

8.3.2 Sammenfatning

Neuro-psykologen Jesper Mogensen var med sit foredrag på konferencen "Hjerne og læring" [Haderup 97] den der gjorde, at vi fik øjnene op for neurovidenskaben som en væsentlig del af kognitiv psykologi. Han får også lov til at sammenfatte neurovidenskabens bidrag til forståelsen af de kognitive processer, idet han både stiller og besvarer det spørgsmål, der gør, at vi tror der er væsentlige bidrag til forståelsen i vente fra den kant:

> "Samlet synes de omtalte forskningsresultater at pege overbevisende på en positiv besvarelse af spørgsmålet : 'Sker der i forbindelse med informationstilegnelse og problemløsning en ændring af hjernens synapse-forbindelser?'. Det lader altså til, at selv den voksne hjerne—samt naturligvis barne-hjernen—er i besiddelse af en 'brugs-relateret' plasticitet. Denne plasticitet indebærer, at hjernens netværk i forbindelse med problemløsning, informationstilegnelse osv. (inklusive enhver form for oplevelse som senere vil kunne genkaldes og altså har været 'lagret') gennemgår en større eller mindre synapse-omstrukturering. Hvilke hjerneområder, der rummer de synaptiske ændringer (samt formentlig hvilke former for ændringer der er tale om), er primært et produkt af de 'psykologiske parametre', der karakteriserer den pågældende problemløsningssituation, oplevelse osv." [Mogensen 97, p. 20].

Kapitel 9

Konsekvenser for potentialerne ved problemløsning og modellering

Ingen af modellerne om hierarkisk begrebsdannelse og semantisk distance skal opfattes som et forsøg på en direkte *beskrivelse* af hjernens opbygning og funktionsmåde. Der er tale om analytiske modeller, hvis styrke primært ligger i at bidrage til at planlægge, samordne og analysere empirisk forskning. På denne vis bidrager modellerne til forsøget på at *forstå* sammenhænge mellem de kognitive processer og forskellige former for "vidensmæssige input", hvilket vi allerede har givet eksempler på, og i dette kapitel vil diskutere mere indgående.

At de resultater, neurovidenskaben specielt indenfor det sidste årti er kommet med, på mange områder peger i retning af, at hjernens måde at repræsentere ny viden på tilsyneladende ikke ligger så fjernt fra en mere kompleks variant af modellernes fremstilling, gør selvfølgelig blot analyser foretaget på basis af modellerne endnu mere interessante.

Vi vil i dette kapitel omtale fire centrale kognitive funktioner, som naturligt falder i to dele: Hukommelse og genkaldelse, og forståelse og læring. Vi vil bruge mest energi på analysen af de to sidstnævnte. Det skal ikke tages som udtryk for, at vi mener hukommelse og genkaldelse er af sekundær betydning—både forståelse og læring *forudsætter* evnen til at huske og genkalde—, men afspejler blot, at vi ift. problemløsning og modellerings potentialer har mest at sige om forståelse og læring.

9.1 Forståelse og læring

At forstå noget betyder at assimilere det ift. en passende aktiverbar semantisk struktur. Det forklarer det subjektive ved forståelse, og understreger at forståelse ikke er "alt-eller-intet". Den i indledningen nævnte følelse af at vide hvordan det føles at have forstået noget, kan nu også forklares: Forståelse af et nyt begreb betyder, at man nu er i stand til at agere passende ift. en ny gruppe af situationer [Skemp 86, pp. 43–44].

Hvis et begreb er assimileret i mange forskellige aktiverbare semantiske strukturer, vil det kunne aktiveres meningsfuldt i tilsvarende mange situationer. Med et navn lånt fra grafteori, kemi og sprogvidenskab, kan vi "gradbøje" en givet persons forståelse af et givet begreb, ved at tale om hvilken *valens* dette begreb har for vedkommende, forstået som hvor mange aktiverbare semantiske strukturer begrebet er konstruktivt assimileret i.

Denne form for forståelse vil vi med et begreb fra [Skemp 77] referere til som *relationel forståelse* med direkte reference til schema-begrebet, og processen der fører hertil vil vi tilsvarende betegne *relationel læring*. Når det er nødvendigt at tilføje ordet "relationel", er det for at kunne skelne operationer med eksterne objekter (symboler, fysisk eksisterende genstande, osv.) baseret på en sådan begrebsforståelse, fra samme operationer gennemført uden at objekternes interne repræsentationer er del af en aktiveret semantisk struktur. Denne form for handlen vil vi tage som udtryk for *instrumentel* forståelse, og parallelt hermed tale om *instrumentel læring*, hvilket altså afspejler en slags "rules without reasons" [Skemp 77, p. 20]. Man "gør bare noget" uden at det sker som en del af en større sammenhæng.

Eksempelvis vil løsningen af en ligning baseret på opskrifter som "saml alle ens led på hver side af lighedstegnet ved at skifte fortegn på leddet når det flyttes" være udtryk for en instrumentel forståelse af "ligning" som begreb.

9.1.1 Forståelse, læring og problemløsning

Hvis et begrebs relation til nye aktiverbare semantiske strukturer udfordres, er der tale om et problem. Problemløsning kan på denne vis opfattes som aktivt at arbejde med at skabe forbindelser mellem begreber og aktiverbare semantiske strukturer, der ikke allerede er assimilerede. Det betyder, at succesfuld problemløsning uundgåeligt bidrager til den relationelle forståelse ved at medvirke til at øge valensen af de begreber, der aktiveres ifm. problemløsningen.

Øvelser kan derimod både bidrage til at man forstærker *allerede eksisterende* forbindelser indenfor en aktiveret semantisk struktur, og altså således forstærker en eksisterende relationel forståelse, eller være udtryk for instru-

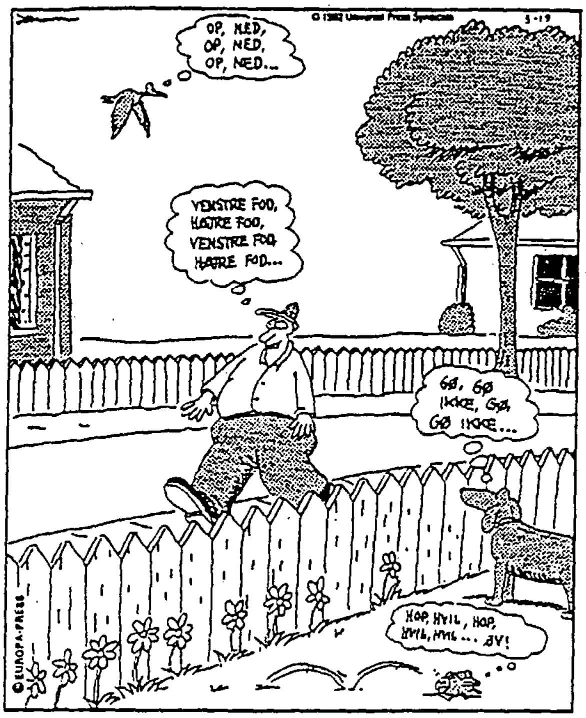
mentel forståelse, hvis øvelsesprocessen gennemføres uden reference til en semantisk struktur.

Når vi mener denne forskellighed er vigtig at slå fast, er det ikke for at kunne sige, at udbygning af den relationelle forståelse vha. problemløsning til hver en tid er at foretrække for instrumentel forståelse opbygget vha. gentagne ensartede øvelser. Faktisk er langt det meste af, hvad man foretager sig som menneske, heldigvis baseret på automatiserede kognitive procedurer[1], som omhyggeligt fritager en fra at problemløse hele tiden. Tænk blot på de tusindvis af motoriske færdigheder, som vi hver dag uproblematisk benytter os af: Vi går uden at overveje, hvilket ben der nu skal sættes forrest; vi drikker af kaffekoppen, uden at opleve afstandsbedømmelsen op til munden og koppens rette hældning som problemer, der skal overvindes; etc.. Men den selvfølgelighed, hvormed vi udfører procedurer som disse, skyldes ikke, at vi er født med disse evner. Tværtimod har så godt som alt, hvad vi som voksne foretager os, været et problem på et tidspunkt i vores udvikling, som vi så—efter hårdt og slidsomt arbejde—har overkommet, og siden gennem utallige gentagelser gjort til en triviel øvelse.

Det gælder også sikker og uproblematisk fastlæggelse af relationerne mellem alle de begreber, vi betjener os af, så de stemmer overens med den almindelige forståelse, både hvad angår dagligdags begreber og begreber fra fx. matematik. For eksempel er algebraiske manipulationer med variable repræsenteret ved bogstaver—fx. ligningsløsning—et problem for en stor del af eleverne i starten af gymnasiet. Det forsøger man så som lærer at ændre ved at sætte eleverne til at løse en masse ligninger i håb om, at ligningsløsning for hovedparten af eleverne skifter karakter fra at være et problem til at være en øvelse. Man arbejder med andre ord på, at eleverne danner en let tilgængeligt semantisk struktur, hvor der er dannet konstruktive forbindelser mellem begreber som "ligning", "variabel", "tal", "plus", "minus", osv.. Først herefter er det muligt at gå videre med nye problemer, der trækker på det at kunne løse ligninger uproblematisk, hvilket gælder størstedelen af arbejdet med de begreber, gymnasiets matematikundervisning ifølge bekendtgørelsen skal inkludere.

Pointen er altså dels, at det er ved at kunne betragte hovedparten af de opgaver, man støder på, som rutinemæssige øvelser, man undgår at skulle starte fra "Adam og Eva" hver gang, hvad enten det drejer sig og motoriske eller matematikprægede færdigheder. *Men* det er kun, når der arbejdes med problemløsning, at der sker en *udvikling* i retning af at øge antallet af forbindelser mellem de dannede begreber, og dermed graden af relationel forståelse.

[1]Ikke at forveksle med handlinger som at trække vejret, svede, osv., der er styret af det autonome nervesystem, og således uden for kognitiv kontrol.



Figur 9.1 *Langt ude.* Af Gary Larson. Fra [Gade 97, p. 208].

Arbejde med øvelser medvirker altså i bedste fald til at *konsolidere* en eksisterende forståelse, mens problemløsning medvirker til at *skabe* ny forståelse. Det er således kun gennem problemløsning at man lærer noget *nyt.*

Der er altså en stor pædagogisk udfordring i for hver elev at finde den rette vekselvirkning mellem øvelser og problemer, ikke mindst når undervisningen foregår i en klasse med 25 elever, der har hver deres optimale tempo for udviklingen af den relationelle forståelse.

Rækkefølgen af problemer og øvelser

Et ofte overset forhold er prioriteringen af problemer og øvelser ifm. *introduktionen* af nye matematiske begreber i undervisningen. Hvis der, som det efter vores vurdering ofte er tilfældet, indledes med at demonstrere begrebets brug i relation til ganske bestemte snævert afgrænsede procedurer, hvorefter sikkerheden i at gennemføre disse procedurer øves, vil disse øvelser kun aktivere ganske få af de tidligere dannede begreber, som grænser op hertil, og derfor kun fremme en instrumentel forståelse. Hvis der derimod indledes med at forsøge at danne relationer til mange af de allerede eksisterende begreber,

vil ethvert efterfølgende forsøg på gennem øvelser at forstærke en bestemt af disse relationer ofte medføre, at der reflekteres over betydningen af de øvrige, endnu kun svage relationer, som derfor som en *sideeffekt* også vil blive forstærket. I dette tilfælde vil øvelserne derfor medvirke til at forstærke en allerede etableret relationel forståelse.

Med den sprogbrug, vi har indtroduceret, betyder det, at relationel læring konsoliderer forståelsen af de begreber, der allerede med stærkere eller svagere relationer tilhører den eksisterende semantiske struktur, der aktiveres ifm. en bestemt øvelse:

> "The significance og this analysis is that if understanding [brugt i betydningen *relationel* forståelse] is built initially, then the ongoing inventive process can operate on mental representations with rich associations. The results of such inventions remain connected to the network of knowledge. Thus, inventions push student's current understanding. Inventions that operate on understanding can generate new understandings, a kind of snowball effect. [...] If the argument is correct, it points to the importance of building understanding—of creating rich networks of knowledge—when a topic is first encountered" [Hiebert 92, p. 74].

Med den direkte forbindelse, vi mener der er, mellem udviklingen af relationel forståelse og praktisering af problemløsning i undervisningen, er den klare konklusion herpå, at man skal *starte* enhver undervisning indenfor et nyt domæne med at løse en masse forskelligartede problemer, og først herefter forstærke de dannede relationer vha. øvelser.

9.1.2 Forståelse, læring og modellering

Med beskrivelsen af, at man kan forstå betydningen af et begreb—og dermed bruge det aktivt—ift. visse kontekster (hvilket er det der ligger i at have det integreret i visse aktiverbare semantiske strukturer), samtidig med at man kognitivt set er uforberedt på at inddrage begrebet i andre sammenhænge (nemlig sammenhænge der trækker på aktiverbare semantiske strukturer, som begrebet ikke er assimileret i), kan vi nu beskrive, hvilke potentialer matematisk modellering som elev-aktivitet har vurderet med et kognitionspsykologisk udgangspunkt. Ved matematisk modellering består udfordringen nemlig pr. definition i at skabe meningsfulde sammenhænge mellem en virkelig kontekst og begreber fra en matematisk formalisme. Herved arbejder eleven aktivt med at assimilere disse begreber i semantiske strukturer, der *i udgangspunktet ikke er matematiske.*

Hvis der er tale om matematikanvendelse indenfor et virkelighedsudsnit, som eleven har arbejdet med før og derfor ikke oplever problematisk, virker modelleringen forstærkende ift. allerede eksisterende relationer mellem de matematiske begreber i spil og aktiverbare semantiske strukturer fra elevens daglige erfaringsverden. Hvis det at forsøge meningsfuldt at relatere netop disse aktiverbare semantiske strukturer til begreber fra matematikkens verden er nyt for eleven, dvs. hvis det er et nyt virkelighedsudsnit, der forsøges modelleret, vil modelleringen undervejs involvere problemløsning, og således medvirke til at forstærke elevens relationelle forståelse af de matematiske begreber *i retning af virkelige problemstillinger.* Det er denne orientering mod virkelige problemstillinger i arbejdet med at øge valensen af de matematiske begreber i spil, der kognitivt set er potentialet ved at inkludere modellering i matematikundervisningen.

I tråd med vores placering af modellering som det mest krævende yderpunkt i spektret af anvendelsesorienterede opgaver, jævnfør omtalen i afsnit 2.4.2, vil den relationelle matematiske begrebsforståelse tilsvarende kunne orienteres mod anvendelsesorienterede problemstillinger, der er mere eller mindre "tilpassede" en given matematisk behandling: Jo flere af de indledende aktiviteter i modelleringsprocessen der overlades til eleven, jo mere realistisk forekommende (uden for klasseværelset) bliver de problemstillinger fra virkeligheden, der afgrænser hvilke semantiske strukturer eleven aktiverer.

I den henseende kan selv ikke nok så veltilrettelagt problemløsning indenfor et isoleret matematisk domæne træde i stedet. Her assimileres de matematiske begreber til semantiske strukturer med et rent matematisk indhold, hvilket øger valensen af begreberne i retning af en mere sammenhængende forståelse af de *matematiske* relationer. Men mellem de samme begreber og semantiske strukturer aktiveret ifm. *virkelige* problemstillinger, er der ikke skabt nye neurale forbindelser, hvorfor muligheden for at aktivere disse matematiske begreber, hvis en lignende virkelig problemstilling optræder igen, ikke er forbedret:

> "The empirical results show that transfer is usually quite specific and contextually bounded. That is, transfer between tasks is most apparent if there are specific external or internal elements in common and if the tasks are situated in common contexts. If the situational features of the task are considerably different and if the tasks are similar only in general ways, transfer is unlikely" [Hiebert 92, p. 75].

Der er med andre ord *ingen direkte forståelsesmæssig overførselsesværdi* mellem rent matematisk opgaveregning og kompetence i konstruktivt at aktivere matematiske begreber ifm. virkeligt forekommende problemstillinger:

For at blive god til at anvende matematiske begreber i ikke-matematiske sammenhænge, er det en nødvendig betingelse, at man før eller siden løser problemer, der direkte udfordrer evnen til at forbinde disse begreber og sammenhænge!

Det er vigtigt at understrege, at påpegningen af manglende "transfer" ifm. matematisk *problemløsning* kun gælder den *direkte* overførselsværdi. Enhver matematiklærer ved, at de elever, der er gode problemløsere i én situation, ofte også er det i en anden, anvendelsesorienteret eller ej. Det skyldes imidlertid ikke den snævert matematiske relationelle begrebsforståelse, men snarere en række ikke-kognitive forhold som trænes ifm. problemløsning af en vilkårlig art: Evnen til at anlægge en strategisk betragtning, evnen til at håndtere en truende nederlagsfølelse, evnen til at arbejde med samme opgave gennem længere tid, mv.[2] Fordi forhold som disse trænes uanset problemtypen, er der en klar *selvforstærkende effekt* ved at mestre problemløsning, som blot ikke må gøre, at betydningen af problemløsnings-domænet overses.

For eksempel peger en sammenligning af professionelle matematikere og novicers måde at håndtere problemløsnings-situationen på, at det er den generelle tilvænning, og ikke det matematiske begrebs-kendskab, der er den afgørende forskel på de to grupper [Schoenfeld 92, p. 354ff.]. Matematikerne har tilsyneladende aktiverbare semantiske strukturer, der generelt er mindre mål-middel styrede (instrumentelle) end novicernes, hvilket gør det nemmere for dem at tænke i problemets struktur før en egentlig løsning forsøges.

Et eksempel

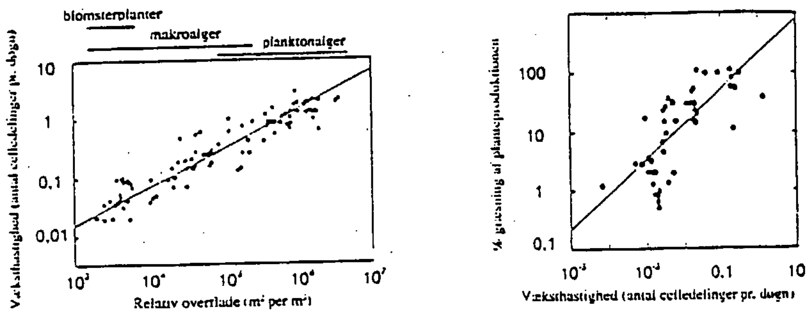
Vi har allerede ifm. omtalen af de fem opgaver fra side 11 nævnt opgave 1 herfra som et eksempel på en opgave, der kun *tilsyneladende* knyttede forbindelser til et ikke-matematisk domæne, omend vi dengang brugte andre ord, jvf. omtalen side 36ff.

Lad os som et aktuelt eksempel se på opgave 3 fra dette års (1998) skriftlige studentereksamen i matematik på den matematiske linjes obligatoriske niveau (B-niveau), gengivet i figur 9.2. Som opgaven er stillet, er der igen kun *tilsyneladende* tale om træning i at knytte en række matematiske begreber til en ikke-matematisk semantisk struktur, her fra mikro-biologiens verden. Ved at kigge nærmere på opgaveteksten kan vi analysere os frem til følgende: a) Det første spørgsmål bearbejder forståelsen af hhv. afhængig og uafhængig variabel ifm. en regneforskrift for en funktion (ved at bede om at indsætte en givet værdi af den afhængige variabel), samt lægger op til træning i ligningsløsning; b) det andet spørgsmål har også hvad navn-

[2] Disse perspektiver på problemløsning omtales nærmere i kapitel 10.

Opgave 3
(ca. 15 point)

De følgende figurer viser resultater fra en undersøgelse af, hvordan visse havplanter vokser og bliver spist (græsset) af mikroorganismer.



Kilde: Naturen Verden, 1996/1.

I en model, som bygger på de viste resultater, beskrives sammenhængen mellem planters væksthastighed v (antal celledelinger pr. døgn) og deres relative overflade x (m^2 pr. m^3) ved

$$v = 1.78 \cdot 10^{-4} \cdot x^{0.66} .$$

Beregn den relative overflade, der svarer til en væksthastighed på 0.1.

Beregn den procentvise stigning i v, når x stiger med 30%.

I samme model beskrives sammenhængen mellem den procentdel af planteproduktionen y, der spises, og væksthastigheden v ved

$$y = 1.89 \cdot 10^2 \cdot v^{0.58} .$$

Bestem y udtrykt ved x.

Figur 9.2 Opgave 3 fra skriftlig studentereksamen i matematik på matematisk linje, obligatorisk niveau (B-niveau), maj 1998.

givning angår forladt biologiens verden, og opfordrer til at knytte begrebet "procentvis ændring" (alternativt: "fremskrivingsfaktor") til en forhåbentlig eksisterende *rent matematisk* forståelse af ligningsløsning (ved at bede eleven om selv at opstille den ligning, der skal løses); c) det tredje spørgsmål er også selv hvad navngivningen angår rent matematisk, og bearbejder forståelsen af begrebet "sammensat funktion", samt lægger op til træning i regning med potens-udtryk ifm. ligningsløsning.

Det er således en opgave, der efter vores vurdering udfordrer forståelsen af en række matematiske begreber på lidt utraditionel vis, og derfor for de fleste elever vil være et problem. Som sådan er det faktisk en god og usædvanlig lidt "standard-præget" opgave, men der dannes *ingen* forbindelser mellem de indgående matematiske begreber og en ikke-matematisk aktiverbar semantisk struktur. At vi ikke er alene om denne vurdering antydes af, at flere elever, vi snakkede med umiddelbart efter eksamen, var enige om, at det var en af de sværeste af opgaverne i eksamenssættet, men også spontant kommenterede opgaven med noget i retning af; "det var egentlig en meget god opgave, men hvorfor var de der tegninger der?"

Hvis samme datamateriale skulle bruges konsekvent til at knytte matematiske begreber til domænet "levende organismers vækst under givne ydre omstændigheder", skulle det eneste givne have været to tabeller med samhørende værdier af hhv. væksthastighed og overfladeareal og andel spiste planter og væksthastighed. Spørgsmålet kunne så blot lyde: "Undersøg om der er en systematisk sammenhængen mellem den andel af planteproduktionen der spises, og planternes relative overflade. Kommenter svaret."

Det er unægtelig en sværere, men også betydelig mere meningsfuld opgave i virkelig forstand, som man så kan "gradbøje" ift. faserne i modelleringsprocessen, hvis man finder det passende.

9.2 Hukommelse og genkaldelse

Prøv at se fem sekunder på hver af følgende to rækker af bogstaver, dæk så papiret til, og prøv at reproducere rækkerne:

$$CLNVODHLIW$$

$$RELATIONERMELLEMENHEDERNE$$

Hvilken af rækkerne var nemmest at huske? For alle normale voksne danskere vil det være den sidste, selv om den indeholder dobbelt så mange bogstaver som den øverste række. Det skyldes vores tidligere omtalte evne til at klassificere informationer i meningsbærende enheder, som altså udover at være et skridt på vejen mod begrebsdannelse også gør, at vi kan huske mange enkeltinformationer ved at "klumpe" dem til et sammenhængende hele [Hiebert 92, p. 75]. Når vi husker den sidste række af bogstaver langt nemmere end den øverste, skyldes det, at øverste række indeholder ti enheder, der skal huskes separat, mens man i nederste række kan nøjes med at huske de tre enheder "relationer", "mellem" og "enhederne". Det er den relationelle forståelse af de enkelte bogstaver i hvert ord, der gør forskellen. Jo højere orden de begreber, som symbolerne repræsenterer, er, jo større er den mængde sanseerfaring, der kan arbejdes med simultant, fordi begreber af høj orden trækker lange "kæder" af underordnede begreber med sig [Skemp 86, p. 29]. Der er altså ifølge modellen om hierarkisk begrebsstrukturer en direkte kobling mellem evnen til begrebsdannelse og effektiv hukommelse.

Når vi skal *genkalde* en erindring, er det afgørende ikke så meget, hvor mange underordnede begreber der "trækkes med", men antallet af

"Mr. Osborne, may I be excused? My brain is full."

Figur 9.3 *Far Out.* Af Gary Larson.

relationer—valensen—det givne begreb indgår i. Et rigt forgrenet netværk giver mulighed for, at mange andre begreber vil kunne fungere som "cues" ifm. genkaldelse af et givet begreb. Hver elaborering danner en ny "sti" til erindringen.

Herudover vil en bestemt kontekst ofte skabe cues til de aktiviteter, der finder sted i denne kontekst, hvorfor de huskes bedre hvis evt. gentagelse finder sted i samme kontekst [Gade 97, p. 227ff.]. I forhold til at lære at anvende matematiske begreber indenfor ikke-matematiske domæner, fx. i forbindelse med modellering, understøtter det pointen om, at man er nødt til rent faktisk at arbejde inden for disse ikke-matematiske domæner for at de matematiske begreber assimileres heri.

9.3 Opsummering og delkonklusion

Vi kan opsummere de vigtigste pointer ved hele fremstillingen i del III, ved at stille relationel og instrumentel læring op overfor hinanden. Vi mener således, at relationel læring har tre *fordele* ift. instrumentel læring:

a) Relationel læring er hukommelsesmæssigt mere effektivt.

b) Relationel læring er selvforstærkende som metode.

c) Relationel læring konsoliderer forståelsen af de begreber, der allerede tilhører den eksisterende semantiske struktur, altså en form for læringsmæssig "snebolds-effekt".

Relationel læring har to *ulemper* ift. instrumentel læring:

i) Hvis en opgave betragtes isoleret, vil relationel læring ofte være en betydeligt langsommere måde at lære at udføre opgaven på.

ii) Eksisterende semantiske strukturer virker selektivt ift. ny læring ved at gøre det lettere at huske nye begreber, der passer ind i en eksisterende semantisk struktur. Uhensigtsmæssige aktiverbare semantiske strukturer kan derfor være en lige så stor blokering for repræsentation af ny viden, som hensigtsmæssige aktiverbare semantiske strukturer kan være en hjælp. [Skemp 86, pp. 38–43].

9.3.1 Kognitiv psykologi og problemløsning

Det, vi selv vil konkludere på basis af den kognitions-psykologiske analyse, er, at problemløsning og arbejde med øvelser medvirker til at udvikle hjernen på to fundamentalt forskellige måder.

Arbejde med øvelser medvirker til at *forstærke allerede eksisterende* neurale forbindelser indenfor en eller flere aktive semantiske strukturer, og giver dermed en mere "driftsikker" *instrumentel eller relationel forståelse*, afhængigt af hvilken form for forståelse der eksisterer, når arbejdet med øvelser igangsættes.

Problemløsning medvirker til at *danne nye* neurale forbindelser mellem begreber og aktiverbare semantiske strukturer, der ikke i forvejen indeholder disse begreber, og øger dermed valensen af den *relationelle forståelse*.

9.3.2 Kognitiv psykologi og modellering

Det væsentligste kognitions-psykologiske potentiale ved modellering er, efter vores vurdering, at modellering udvider de domæner, som eleverne konstruktivt kan aktivere deres matematiske begreber indenfor. Ved at anvende et givet matematisk begrebsapparat til at modellere en ikke-matematisk problemstilling, assimileres de matematiske begreber i en række ikke-matematiske semantiske strukturer, der aktiveres ifm. denne problemstilling. En sådan relationel forståelse i retning af ikke-matematiske domæner opnås *kun* ved at eleverne *selv arbejder aktivt* med en matematisk tilgang til problemstillinger fra disse domæner. Hverken en lærer-guidet "rundtur" i model-verdenen, eller nok så mange og veltilrettelagte matematiske problemstillinger med ringe eller ingen anvendelsesorientering, giver eleverne forståelse af denne karakter.

Del IV

Afrunding

Kapitel 10

Konklusion og perspektivering

I kapitel 1 sammenfattede vi karakteristikken af det problemfelt, vi ville analyse, med følgende spørgsmål:

> *Hvordan kan vi konstruktivt karakterisere problemløsning og modellering, og hvilke potentialer kan vi på baggrund af hhv. matematikfaglige og kognitions-psykologiske analyser argumentere for, der er, ved at arbejde med problemløsning og modellering i gymnasiets matematikundervisning?*

Vi har nu i kapitel 2 grundigt analyseret og diskuteret betydningen af begreberne problemløsning og modellering, og herefter analyseret deres potentialer som elementer i gymnasial matematikundervisning, i kapitlerne 3–6 med et matematikfagligt udgangspunkt, og i kapitlerne 7–9 med udgangspunkt i resultater fra kognitions-psykologi. Nedenfor har vi i punktform forsøgt at sammenfatte, hvad vi undervejs i disse analyser har kunnet konkludere.

Med specialet har vi gerne villet bidrage til, at der på sigt sker en ændring af problemløsning og modellerings rolle i gymnasiematematikken, der også viser sig i den daglige undervisning. Vi vil derfor i afsnit 10.2 runde rapporten af med at pege på nogle forhold, som vi mener er centrale at holde sig for øje, hvis man vil forsøge at give problemløsning og modellering en mere central placering i undervisningen, end det er tilfældet i dag.

10.1 Konklusion

Begrebsmæssig klarhed muliggør reflekteret opgavevalg: Vi kan temmelig præcist karakterisere matematikopgaver—herunder dem stillet til studentereksamen—fra to vinkler: Dels om der er tale om *et problem* eller *en øvelse* relativt til en givet målgruppe, dels hvilke dele af *modelleringsprocessen* en givet opgave udfordrer modtageren til selv at arbejde aktivt med, og hvilke dele der eventuelt er gennemført af opgavestilleren. Uanset hvilke begrundelser for at gennemføre matematik-undervisning man som enkeltperson eller som officielt organ har, kan en sådan opgave-karakteristik bidrage til at skabe bedre overensstemmelse mellem disse begrundelser og valg af opgave-typer.

Anvendelsesorienterede opgaver—et spektrum: Anvendelsesorienterede opgaver udgør et spektrum med modellering som det mest krævende yderpunkt. Bedømt ud fra en sammenholdelse af det erklærede formål med gymnasiets matematikundervisning under den gældende bekendtgørelse, og de sidste otte års eksamensopgaver stillet på obligatorisk niveau, er det ikke en erkendelse, der er udbredt blandt de ansvarlige tilrettelæggere af gymnasiets matematikundervisning.

Modellering—en årsags diskussion: Graden og omfanget af anvendelsesorientering—og dermed også modellering—i matematikundervisningen er primært en årsags diskussion, der fører tilbage til den eksterne fagopfattelse af matematik.

Modellering og den økonomisk/tekniske årsag: I halvtresserne, hvor den eksterne fagopfattelse kan karakteriseres som teknologisk pragmatisme, spillede modellering en meget ringe rolle i gymnasiets matematikundervisning, der udelukkende skulle lægge det matematiske fundament til videre studier.

I halvfemsernes matematikundervisning henviser den økonomisk/tekniske årsag i stadig højere grad til matematiks anvendelser indenfor ikke-naturvidenskabelige fagområder parallelt med de traditionelle naturvidenskabelige anvendelser; matematikanvendelserne er "eksploderet" i omfang dækkende en stadigt bredere fagvifte. Modellering i gymnasiets matematikundervisning kan helt indiskutabelt siges at have stort potentiale ift. at forberede eleverne på at kunne imødekomme de arbejds- og studiemæssige krav, en sådan bredspektret matematikanvendelse stiller.

Modellering og den individorienterede årsag: Som vi vurderer det, er ønsket om—parallelt med en teknologisk kompetence—at udvikle elevernes demokratiske kompetence det væsentligste karakteristika ved ændringen af det eksterne matematiksyn gennem de sidste ca. 20 år. Modellering i matematikundervisningen har et stort potentiale ift. udvikling af en sådan demokratiske kompetence. Jo længere væk fra modellering man kommer i spektret af anvendelsesorienterede opgaver, jo mindre udvikles denne kompetence.

Ved siden af dette har primært den informationsteknologiske udvikling stillet avancerede redskaber til rådighed indenfor den mere private (eller dagliglivs) og erhvervsrettede sfære. Ifht. at kunne udnytte disse teknologiske landvindinger, har modellering i matematikundervisningen helt indiskutabelt store potentialer.

Modellering og strukturalisme: Som reelt virkende årsag bag 60'er-reformen har vi peget på det i matematik-uddannelsessystemet klart oplevede behov for indsocialisering af tilstrækkeligt mange unge mennesker i en moderne udgave af matematik *som videnskabsfag.* Det filosofiske udgangspunkt herfor kan helt entydigt siges at være *strukturalisme.* Med et sådant udgangspunkt for matematikundervisningen har modellering—i den betydning vi tillægger begrebet—ingen umiddelbare potentialer.

Modellering og socialkonstruktivisme: I den socialkonstruktivistiske tilgang til matematik, med vægt på bla. proces, personliggørelse og social kontekst, er der derimod store potentialer i at arbejde med modellering. Modelleringsarbejde understreger flere angrebsvinkler og metoder, udviklingsprocessen er karakteriseret ved dynamisk samspil af flere aktører og viser dermed matematikken på en ikke-autoritær, ikke-isoleret og ikke-produktorienteret måde.

Problemløsning—en læringsmæssig diskussion: Vægtningen mellem problemer og øvelser i matematik-undervisningen er primært en læringsmæssig diskussion, der fører tilbage til, hvilken form for forståelse man som enkeltperson eller som officielt organ ønsker at fremme.

Problemløsning og relationel læring: Problemløsning i matematikundervisningen har et læringsmæssigt potentiale ift. at udvikle elevernes *relationelle* forståelse af de indgående matematiske begreber. Deri ligger, at problemløsning vil kunne bidrage til en langsigtet forståelse med anvendelsesmuligheder indenfor mange forskellige domæner, men også at det er en tidskrævende måde at arbejde med stoffet på.

Et læringsmæssigt potentiale ved modellering: Modellerings væsentligste læringsmæssige potentiale er, at det—praktiseret som en proces, eleverne selv arbejder sig igennem—udvider de domæner, som eleverne konstruktivt kan aktivere deres matematiske begreber indenfor, i retning af større *erfaringstilknytning*. Ved at anvende et givet matematisk begrebsapparat til at modellere en ikke-matematisk problemstilling, assimileres de matematiske begreber i en række ikke-matematiske semantiske strukturer, der aktiveres ifm. denne problemstilling.

Samspil mellem problemløsning og modellering: At problemløsning og modellering ofte vil være i spil samtidig, da mange modelleringsforløb vil afstedkomme problemer undervejs, gør det ikke mindre relevant at kunne skelne mellem de udfordringer, de to typer aktiviteter afstedkommer, tværtimod. Evnen til at skelne oplever vi som en styrke ved tilrettelæggelsen af undervisningen, både fordi man derved kan stille skarpt på, hvilke kompetencer det *egentlig* er, man ønsker at eleverne udvikler, og fordi man i forbindelse med modellerings-aktiviteter lettere kan analysere, hvori elevernes vanskeligheder ligger.

10.2 Perspektivering

10.2.1 Problemløsning i matematikundervisningens praksis

I en oversigtsartikel fra 1994 om forskning i problemløsnings rolle i matematikundervisningen, hævder Lester at:

> "Although acceptance of the notion that problem solving should play a prominent role in the curriculum has been widespread, there has been anything but widespread acceptance of how to make it an integral part of the curriculum. To date, no mathematics program has been developed that adequately addresses the issues of making problem solving the central focus of the curriculum" (citeret i [Barkatsas 96, p. 11]).

Hvis man som vi tager denne påstand for gode varer, også når det gælder hvordan problemløsning er indplaceret i den gymnasiale matematikundervisning, og i øvrigt er enig i ovenstående konklusioner, er der med andre ord en stor udfordring i at eksperimentere med, hvordan man bedst sætter problemløsning på dagsordenen, og—nok så væsentligt—lærer eleverne den svære kunst.

Alan Schoenfeld har—at dømme efter hans publikationsliste—gjort det til sit livsprojekt at udvikle en effektiv måde at *undervise* i problemløsning på. Med udgangspunkt i Polyas *karakteristik* af, hvad matematisk problemløsning generelt indebærer, jvf. omtalen i kapitel 2, har han i [Schoenfeld 85] og [Schoenfeld 92] opstillet fem elementer, der er med til at afgøre folks evne til problemløsning, og som derfor er vigtige at være opmærksom på i et eventuelt forsøg på at undervise nogen i problemløsning:

- Kognitive ressourcer.
- Heuristik.
- Kontrol og metakognition.
- Følelser i forhold til—og forestillinger om—sig selv, omgivelserne, emnet, og mere overordnet om matematik.
- Skikke og sædvaner i matematikundervisningen.

De to førstnævnte punkter har vi allerede diskuteret i rapporten. I kapitel 9.3.2 argumenterede vi for, at problemløsning kræver—og bidrager til at udvikle—kognitive ressourcer i retning af evnen til at assimilere begreber i nye semantiske strukturer (schemas), hvilket selvfølgelig er lettere, jo flere begreber og semantiske strukturer der er at bygge på. I kapitel 2.6.2 fremlagde vi, hvordan Polyas bredt accepterede karakteristik af en generel metode ifm. matematisk problemløsning peger på behovet for, at der undervises direkte i en sådan heuristik. Vi vil derfor her nøjes med at kommentere de tre sidstnævnte punkter på Schoenfelds liste.

Kontrol og metakognition

Metakognition er et ord, som bruges i flere forskellige betydninger. Den følgende definition af Flavell fra 1976 er ifølge Barkatsas den mest generelt accepterede, fordi den udtrykker to centrale aspekter; overvågning og regulering af ens egne kognitive processer:

> "Metacognition refers to one's knowledge concerning one's own cognitive processes and products or anything related to them, e.g., the learning-relevant properties of information or data. Metacognition refers, among other things, to the active monitoring and consequent regulation and orchestration of these processes in relation to the cognitive objects on which they bear, usually in the service of some concrete goal or objective" [Barkatsas 96, p. 16].

Ved at studere hhv. eksperters og novicers problemløsning er det tydeligt, at en af de afgørende forskelle er evnen til kontrol med egne løsningsstrategier.

Udvikling af en sådan *metakognitiv evne* som en del af at lære eleverne at tage ansvar for egen læring, bør derfor prioriteres højt ved undervisning i problemløsning [Schoenfeld 87c, p. 192ff.] og [Barkatsas 96, pp. 18–19].

Følelser og forestillinger

a) "Der var engang et land. Der boede en masse mennesker, som der som oftest gør i et rigtigt land, og de fleste af dem var gift, men aldrig med mere end en af gangen. Utroskab forekom dog, men var på det strengeste forbudt. Nu forholdt det sig således, at alle mændene kendte til alle de utro koner, kun vidste ingen af dem, om deres egen kone var tro eller utro. At spørge hinanden faldt dem naturligvis ikke ind, endnu fjernere var forestillingen om at sladre. Men kongen vidste om al denne utroskab, så han befalede, at dersom en mand opdagede, at hans kone var ham utro, så skulle han øjeblikkelig dræbe hende samme nat. Ingen barmhjertighed! Nu gik der 63 dage og nætter uden at der skete noget, men på den 64-sindstyvende nat blev samtlige utro koner slået ihjel. Spørgsmål: Hvor mange utro koner var der i landet?" [Bastian 92, p. 112f.].

b) Bestem største- og mindsteværdi, monotoniforhold og eventuelle asymptoter for funktionen f givet ved

$$f(x) = \frac{3x^3 - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 3x} \quad , \quad x \in [1;4]$$

Hvilken af disse to opgaver vil du helst bruge tid på? Garanteret den første! Siden du har gidet læse helt hertil i rapporten, er du nemlig givetvis matematiker i den forstand, at du er interesseret i, fascineret af og god til matematik. Opgave a) vil derfor sikkert opleves som et problem umiddelbart, mens opgave b) er en rutinemæssig øvelse, som sikkert vil tage lidt tid at lave, men ingen strategiske overvejelser kræver. Og som matematiker er du næsten defineret ved, at du foretrækker matematiske problemer frem for matematiske øvelser.

Pointen er, at en typisk gymnasieelev *i en undervisnings- eller eksamenssituation* vil reagere lige modsat. Han eller hun vil genkende opgave b) som en måske lidt svær variant af en klassisk opgavetype; funktionsundersøgelse. Alle de indgående delspørgsmål er grundigt øvet i timerne, hvorfor han/hun i hvert fald vil kunne starte på opgaven, hvilket er afgørende for, at opgaven virker "tiltalende" i en situation, hvor elevens formåen observeres, enten af læreren og de øvrige elever ifm. den daglige undervisning, eller ifm. eksamen.

Opgave a) vil i samme ufrie situationer derimod virke afskrækkende på gymnasieeleven, dels fordi det ikke er givet, hvordan man i det hele taget skal starte opgaveløsningen, dels fordi der er en væsentlig risiko for, at man ender med at måtte give op, hvilket unægtelig fremkalder følelser, som kræver træning at håndtere (hvis du vil prøve at klare opgaven uden "vink", så lad være at læse denne fodnote[1]).

Neurovidenskaben er især indenfor det sidste årti begyndt at kunne bidrage til forståelsen af følelsernes betydning for læring. På konferencen om hjerne og læring, cf. [Haderup 97], holdt den finske hjerneforsker Åke Pålshammer et foredrag om dette emne, som vi kort vil referere.

Den nye hjerneforskning viser en emotionel hjerne. Hjernen har biologiske kanaler, der tillader en følelsesmæssig reaktion at udøve direkte kontrol over sind og krop uden om de bevidste, kognitive centre, som stadig spiller en hovedrolle i det menneskelige sind. Følelsernes overtagelse af kontrollen med individet gælder også for det moderne menneske. Man taler om tilbøjeligheder til *emotionel kapring* af de mentale styringsprocesser, hvad der i en lang række sammenhænge kan føre til destruktiv adfærd. På den anden side er den følelsesmæssige dynamiks betydning for, at de kognitive evner og den traditionelle intelligens kommer til udfoldelse, blevet stadig mere tydelig gennem den seneste forskning.

Selv om dette foredrag var et godt bud på en *forklaring* af følelsernes betydning, så er det unægtelig svært at bruge konstruktivt i den daglige undervisning. Selv om der gøres mange forsøg på bidrage hertil, nævnes det som et problem, at forskning i følelsernes indvirkning på problemløsning mangler enighed om forskningsmetoder [Barkatsas 96, pp. 23–25]. En ting mener vi dog er givet: Det er helt afgørende for succesfuld inddragelse af problemløsning i gymnasiets matematikundervisning, at der arbejdes direkte med at få eleverne til at føle sig som "små matematikere", hvilket blandt andet betyder, at de foretrækker opgave a) frem for opgave b).

Skikke og sædvaner

Omtalen af følelsernes betydning for evnen til problemløsning, fører os naturligt over i en diskussion af, hvordan matematikundervisning i gymnasiet typisk foregår. Schoenfeld nævner en skik i matematikundervisningen (som vores erfaring til fulde bekræfter), som har meget uheldige konsekvenser for elevernes overordnede forestilling om matematik:

[1] Forudsæt at alle mændene er uhyre snedige og intelligente, og husk så, at utroskab faktisk forekommer, dvs. der er *mindst* en utro kone. Hvis der faktisk kun er én, vil hendes mand kunne regne det ud (hvorfor?), og derfor dræbe hende første nat. Da det ikke sker, må der altså være mere end én utro kone. Herfra er det et spørgsmål om induktion!

> "Suppose that during your entire academic career, every mathematics problem that you were asked was in fact a straightforward exercise designed to test your mastery of a small piece of subject matter. You were expected to solve such problems in just a few minutes: If you did not, it meant that you had not understood the material and the material should be explained to you again. Suppose in addition that this scheme was reinforced in class: Problems were expected to be solved rapidly, and teachers gave you the solutions if you did not produce the answers quickly. having had the experience over and over again, you might eventually codify it as the following (implicit) rule: When you understand the subject matter, any problem can be solved in 5 minutes or less. The stronger form of this rule is even worse: If you fail to solve a problem in 5 minutes, give up. Unfortunately, this story is not hypothetical: My research indicates that this belief and a number of equally counterproductive beliefs about mathematics are all too common among our students" [Schoenfeld 87b, p. 27].

Denne svada giver grobund for en—på sin vis triviel, men nok så vigtig—konklusion, som er nem at forholde sig til som praktiserende matematiklærer: *Hvis man har et ønske om at lære sine elever at løse problemer frem for bare at gennemføre øvelser, så er det en nødvendig betingelse, at de ofte i undervisningen får tid og opbakning til rent faktisk at praktisere problemløsning.*

10.2.2 Modellering i matematikundervisningens praksis

Vedrørende modellering, eller mindre radikal anvendelsesorientering, kan vi forestille os mange forskellige svar på spørgsmålet om, hvordan det kan inddrages i matematikundervisningen. Werner Blum og Mogens Niss har forsøgt at inddele alle de muligheder, der i tidens løb har været fremme, i nogle få hovedkategorier, og er nået frem til følgende overordnede tilgange [Blum 91, pp. 60–62]:

The separation approach. Arbejde med modellering foregår i separate kurser adskilt fra den traditionelle matematikundervisning, der derfor ikke behøver blive påvirket af inddragelsen af modellering.

The two-compartment approach. Matematikundervisningen er adskilt i to dele. Første del er et traditionelt kursus i "ren" matematik, der så i anden del forsøges anvendt på mere eller mindre realistiske problemstillinger.

The island approach. Matematikundervisningen er tilrettelagt som flere succesive forløb, der alle er styret af "the two-compartment approach". Herved får tilrettelæggelsen karakter af undervisning i "ren" matematik afbrudt af "øer" med modellering.

The mixing approach. Med denne tilgang assisterer problemløsning og modellering indlæringen af matematiske begreber så ofte, som det skønnes muligt, både ved at motivere introduktionen af nye begreber, og ved at bringe allerede introducerede begreber i spil i forskellige sammenhænge. Herved kan indlæringen af den "rene" matematik og mere eller mindre realistiske anvendelser heraf godt fremstå som ligeværdige størrelser for eleverne. Hvad angår tilrettelæggelsen er det imidlertid karakteristisk for denne tilgang, at de to elementer i matematikundervisningen er prioriteret således, at indholdet og rækkefølgen af de matematiske begreber er givet på forhånd[2], hvilket de valgte anvendelsesorienterede problemstillinger tilpasses efter.

The mathematics curriculum integrated approach. Her er udgangspunktet en række problemer, "rene" matematiske og/eller anvendelsesorienterede, og matematik til at håndtere disse problemer forsøges først udvalgt og udviklet efterfølgende. I princippet er den eneste restriktion, at de behandlede problemer fører til matematik, der er relevant for og lydig i forhold til den givne læseplan for matematik.[3]

The interdisciplinary integrated approach. Her er problemstillingerne ligesom i forrige tilgang styrende for, hvilke matematiske begreber eleverne introduceres for. Forskellen består i, at matematik med denne tilgang ikke optræder som selvstændigt fag, hvorfor den matematiske behandling af de valgte problemstillinger blot er et ud af flere elementer i et tværfagligt samarbejde.

Som nævnt i kapitel 1 er det vores indtryk, at arbejdet med modellering i gymnasiets matematikundervisning overvejende foregår som kortere velafgrænsede forløb, altså efter "the island approach". Dette indtryk bekræftes af Blum og Niss som en international tendens, idet de i samme artikel nævner denne og "the mixing approach" som de to fremherskende på gymnasialt niveau. Kun sjældent opleves matematikundervisning tilrettelagt, så det med

[2]Om det er den enkelte lærer eller undervisningsministeriet, der står for denne del af tilrettelæggelsen, er i denne sammenhæng underordnet.

[3]"Here problems, whether mathematical or applicational, come first and mathematics to deal with them is sought and developed subsequently. In principle the only restriction is that the problems considered lead to mathematics which is relevant to and tractable in the given mathematics curriculum" [Blum 91, p. 61].

rimelighed kan rubriceres under "the mathematics curriculum integrated approach", hvilket i sig selv er en medvirkende årsag til, at vi finder det specielt interessant, at der eksperimenteres med, hvilke potentialer der er i denne tilrettelæggelsesform.

En anden grund til at vi vil pege på "the mathematics curriculum integrated approach" som den umiddelbart mest interessante tilrettelæggelsesform at undersøge nærmere, er at der sker et afgørende skift fra "the mixing approach" til "the mathematics curriculum integrated approach" med hensyn til hvad der betinger hvad. I alle de fire førstnævnte tilgange vil det være læseplanens liste over matematiske begreber, der styrer tilrettelæggelsen, som valget af opgavetyper herefter indordnes under. Dette forhold er—som det fremgår af citatet ovenfor—byttet om ved "the mathematics curriculum integrated approach" og "the interdisciplinary integrated approach", hvilket selvfølgelig kun gør vores fokus på valg af opgavetyper endnu mere relevant. Og da den tværfaglige tilgang ikke er praktisk mulig som gennemgribende tilrettelæggelsesform med gymnasiets nuværende fag-opdelte struktur, vælger vi at pege på "the mathematics curriculum integrated approach" som den tilrettelæggelsesform, der på kort sigt virker mest interessant at arbejde videre med.

Schoenfelds ovenfor citerede argument om, at tilvænning til at arbejde mere end fem minutter med den samme opgave er centralt, må også gælde lange modelleringsforløb. Her er det måske i mindre grad frustrationen over ikke at kunne komme igang, der kræver tilvænning, men evnen til selv at skulle stille de relevante underspørgsmål, arbejde med samme problemstilling i længere tid, mv..

10.2.3 Mulige indsatsområder

Man kan forestille sig mange—ikke gensidigt udelukkende—forklaringer på, at kortere modelleringsforløb langt fra fungerer optimalt i forhold til den ønskede anvendelseskompetence, hvis man accepterer vores påstand om, at det er tilfældet.

En mulighed er, at det er *lærernes* generelle kompetence i at gøre matematikundervisningen anvendelsesorienteret, der halter. Det arsenal af pædagogiske virkemidler, som den enkelte lærer er fortrolig med, er måske ikke tilstrækkeligt i forhold til denne dimension i undervisningen. Baggrunden herfor kan bla. tænkes at være, at de fleste gymnasielærere er uddannet på universiteter, hvor der er meget lidt fokus på anvendelsen af matematik, hvorfor de naturligt føler sig på udebane, når de pålægges at undervise heri. Desuden stemmer et sådant pålæg ikke med den fagopfattelse, lærerne selv er blevet vænnet til, hvorfor de på forhånd er modvilligt indstillede; den an-

del af lærerstaben, der som udgangspunkt er positivt indstillet ift. det at arbejde med matematiske modeller i undervisningen, er måske forsvindende lille. Både når problemet er usikkerhed og uvillighed, er det derfor massiv efteruddannelse af den eksisterende lærerstab, og på sigt en reform af de traditionelle gymnasielæreruddannelser i matematik, der er behov for.

En anden mulig forklaring er, at lærerne føler sig presset rent tidsmæssigt af den store mængde snævre matematisk-tekniske færdigheder, eleverne stilles til regnskab for til den afsluttende *eksamen*. De både vil og kan måske godt sikre større anvendelseskompetence blandt deres elever, men oplever anvendelsen af undervisningstiden som et trade off mellem de matematisk-tekniske færdigheder på den ene side, og på den anden side kompetence i at anvende disse færdigheder på ikke-matematiske problemstillinger. Så længe man kun bedømmer de matematisk-tekniske færdigheder til eksamen, vil mange lærere være styret heraf, og nedprioritere udviklingen af elevernes anvendelseskompetence til fordel for en mere snæver begrebsgennemgang, uanset hvad den enkelte lærer ville foretrække i en situation uden bedømmelse udefra. I dette tilfælde er det en ændret måde at bedømme elevernes kunnen, der er den nødvendige "medicin".

En tredje mulighed er, at *undervisningsmaterialerne* bredt anskuet er for dårlige. Problemet kan være de hæfter, kapitler i lærebøger, forløbsbeskrivelser mv., der anvendes, eller at der mangler relevante eksempler at arbejde med, hvorfor eleverne altid oplever den samme type modeller, og tror at brugen heraf er begrænset til den type, læreren foreslår. Kuren imod dette problem er oplagt bedre undervisningstekster og større spredning i modeleksemplerne.

Fjerde forklaringskategori fremkommer ved at fokusere på *eleverne*. Problemet er måske slet ikke arbejdet med matematiske modeller, men generelt det at lære at anvende teoretisk viden som fx. matematisk indsigt på en virkelig problemstilling. Man kunne hævde, at det kræver en større grad af modenhed og ansvarlighed i forhold til egen læring, end tilegnelse af mere teknisk prægede færdigheder, jvnf. diskussionen af metakognitive evners betydning. Hvis gymnasieeleverne generelt ikke besidder en sådan modenhed, kræver opnåelse af anvendelseskompetencen ift. matematik, at man enten udskyder projektet til efter gymnasiet, hvor de elever, man møder, forhåbentlig har vokset sig modne, eller at man i højere grad, end det nu er tilfældet, i løbet af gymnasiet opdrager eleverne i forhold til det at lære.

Efter vores vurdering er alle disse fire områder væsentlige at arbejde videre med, hvis man som vi gerne vil bidrage til, at gymnasieeleverne i højere grad, end det synes at være tilfældet i dag, konstruktivt og kritisk kan anvende den matematik, de undervises i.

Litteratur

[Andersen 92] Andersen, Heine (red.): *Sociologi—en grundbog til et fag*, Hans Reitzels Forlag, 1992.

[Andersen 96] Andersen, Heine og Lars Bo Kaspersen (red.): *Klassisk og moderne samfundsteori*, Hans Reitzels Forlag, 1996.

[Arbo-Bähr 97] Arbo-Bähr, Henrik, m.fl.: *Samfundsstatistik 1997*, Columbus, 1997.

[Barkatsas 96] Barkatsas, Anastasios N. og Robert Hunting: *A review of recent research on cognitive, metacognitive and affective aspects of problem solving*, Nordisk matematikkdidaktikk 4, 1996.

[Bastian 92] Bastian, Peter: *At danse med matematikken*, i [Christoffersen 92, pp. 111–117].

[Biehler 94] Biehler, R. og R.W. Scholz og R. Strasser og B. Winkelmann (ed.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Disciplin*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[Bishop 96] Bishop, Alan J. et al. (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[Björkqvist 93] Björkqvist, Ole: *Social konstruktivism som grund for tilegnelsen af matematiske begreber*, Nordisk matematikkdidaktikk 1, pp. 8–17, 1993.

[Blomhøj 85] Blomhøj, Morten, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen: *Treenigheden Bourbaki—generalen, matematikeren & ånden*, Tekster fra IMFUFA 94, Roskilde Universitetscenter, 1985.

[Blomhøj 92] Blomhøj, Morten: *Modellering i den elementære matematikundervisning—et didaktisk problemfelt*, Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole, 1992.

[Blomhøj 93] Blomhøj, Morten: *Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber*, Nordisk matematikkdidaktikk 1, pp. 18–39, 1993.

[Blum 89a] Blum, Werner et al. (ed.): *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*, Horwood, Chicester, 1989.

[Blum 89b] Blum, Werner, Mogens Niss og Ian Huntley (ed.): *Modelling, Applications and Applied Problem Solving—Teaching Mathematics in a Real Context*, Horwood, Chicester, 1989.

[Blum 91] Blum, Werner og Mogens Niss: *Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects—State, Trends and Issues in Mathematics Instruction*, Educational Studies in Mathematics 22, pp. 37–68, 1991.

[Bollerslev 79] Bollerslev, Peter: *Den ny matematik i Danmark—en essaysamling*, Nordisk Forlag, 1979.

[Branner-Jørgensen 81] Branner-Jørgensen, Bodil m.fl. eds.: *Rapport fra Landsmødet om Matematikken i Danmark 1981*, Dansk Matematisk Forening, København, 1981.

[Bregengaard 84] Bregengaard, Per, m.fl.: *Skolen i en krisetid*, Samfundsfagsnyt, København, 1984.

[Christiansen 67] Christiansen, Bent: *Mål og midler i den elementære matematikundervisning*, Munksgaard, 1967.

[Christiansen 89] Christiansen, Bent: *Konferencens tema i fagdidaktiske perspektiver*, i *Gymnasiets matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav og demokratikrav*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, 1989.

[Christoffersen 92] Christoffersen, Torben og Flemming Clausen (red.): *Udsagn—en mosaik om matematik*, Matematiklærerforeningen, 1992.

[Cobb 89] Cobb, Paul: *Experiential, Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education*, For the Learning of Mathematics, vol. 9, no. 2, pp. 32–42, 1989.

[Dal 84] Dalberg-Larsen, Jørgen.: *Retsstaten, Velfærdsstaten og hvad så?*, Akademisk Forlag, 1984.

[Davis 81] Davis, Philip J. og Reuben Hersh: *The Mathematical Experience*, Birkhäuser Boston, 1981.

[Dohrn 1975] Dohrn, Detlef mf.: *Matematiks anvendelse i samfundsfag*, Munksgaard, 1975.

[Dræby 95] Dræby, Claus og Michael Hansen og Tomas Højgård Jensen: *ADAM under figenbladet—et kig på en samfundsvidenskabelig matematisk model*, Tekster fra IMFUFA 299, Roskilde Universitetscenter, 1995.

[Eibe 97] Eibe, Thyra: *Euklids Elementer I-IV*, Gyldendal, 1897.

[Ernest 91] Ernest, Paul: *The philosophy of Mathematics Education*, The Falmer Press, 1991.

[Fenchel 64] Fenchel, W. og T. Gutmann Madsen: *Noter til Matematik 1, 1964–65, nr. 11*, Matematisk Institut, Københavns Universitet, 1964.

[Friisberg 77] Friisberg, Claus: *Den nordiske velfærdsstat—Velfærdsdebat og velfærdspolitik efter 1945*, Gyldendal, 1977.

[Gade 97] Gade, Anders: *Hjerneprocesser—Kognition og neurovidenskab*, Frydenlund, 1997.

[Griffiths 74] Griffiths, H.B. og A.G. Howson: *Why Teach Mathematics?*, kap. 2 i *Mathematics: Society and Curricula*, Cambridge University Press, 1974.

[Grouws 92] Grouws, Douglas A. (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, 1992.

[Haderup 97] Haderup, Lene m.fl. (red.): *HJERNE og læring—Stof til eftertanke*, rapport fra en konference afholdt af Danmarks Lærerhøjskole, 1997.

[Hermann 89] Hermann, K. og B. Hirsberg: *Recent trends and experiences in applications and modelling as part of upper secondary mathematics instruction in Denmark*, i [Blum 89b, pp. 219–26].

[Hiebert 92] Hiebert, James and Thomas P. Carpenter: *Learning and Teaching with Understanding*, i [Grouws 92, pp. 65–97].

[Hvid 92] Hvid, Helge og Niels Møller: *Økonomi, produktion og arbejde*, i [Andersen 92, pp. 109–126].

[Høyrup 79] Høyrup, Jens: *Historien om den nye matematik i Danmark—En skitse*, i [Bollerslev 79, pp. 49–65].

[Iversen 96] Iversen, Christine: *Reformer i gymnasiets matematikundervisning—60'er matematikken i historisk belysning*, 3. modul projektrapport, historie, Roskilde Universitetscenter, 1996.

[Jensen 94] Jensen, Peter Hauge og Linda Kyndlev: *Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det! Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem*, Tekster fra IMFUFA 284, Roskilde Universitetscenter, 1994.

[Jørgensen 81] Jørgensen, Bodil Branner-, m.fl. eds.: *Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark 1981*, Dansk Matematisk Forening, 1981.

[Kaspersen 96] Kaspersen, Lars Bo: *Anthony Giddens*, i [Andersen 96].

[Kristensen 62] Kristensen, Erik og Ole Rindung: *Matematik 1*, GAD, København, 1962.

[Kruchov 85] Kruchov, Chresten, m.fl. eds.: *Bidrag til den danske skoles historie—bind 4*, Unge Pædagoger, 1985.

[Kruchov 85a] Kruchov, Chresten: *Socialdemokratiet og folkeskolen*, kapitel i [Kruchov 85].

[Kühle 96] Kühle, Ebbe: *Danmark · Historie · Samfund—hovedfaser i Danmarkshistorien*, Gyldendal, 1996.

[Law 97] Law, Ian: *Hjernens funktionelle kortlægning med Positron Emission Tomografi (PET)*, i [Haderup 97, pp. 24–29].

[Lesh 86] Lesh, Richard m.fl. (organisers): *Theme Group 6: Applications and modelling*, i Marjorie Carss (ed.): *Proceeding of the Fifth International Congress on Mathematical Education (ICME 5)*, Birkhäuser, Brisbane, 1986.

[Mejlbo 91] Mejlbo, Lars: *Matematikkens aspekter—Om det uendelige*, Matematiklærerforeningen, 1991.

[Mogensen 97] Mogensen, Jesper: *Skolen former hjernen*, i [Haderup 97, pp. 10–23].

[Nesher 90] Nesher, Pearla og Jeremy Kilpatrick: *Mathematics and Cognition*, Cambridge University Press, 1990.

[Niss 77] Niss, Mogens: *The 'crisis' in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school level*, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, vol. 8, no. 3, 1977.

[Niss 79] Niss, Mogens: *Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser frem til 1990*, Manuskriptet til et foredrag holdt på to efteruddannelseskurser for matematiklærere, Tekster fra IMFUFA 36, 1980. Forefindes i lettere forkortet udgave i Normat 28(2), 1980.

[Niss 84] Niss, Mogens: *Kritisk matematikundervisning—nødvendig men vanskelig*, Artikel fra Unge Pædagoger nr. 4 maj, 1984. Gengivet i Tekster fra IMFUFA 84, 1984.

[Niss 87] Niss, Mogens: *Applications and modelling in the mathematics curriculum—state and trends*, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, vol. 18, no. 4, 1987.

[Niss 89] Niss, Mogens: *Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula*, i [Blum 89a, pp. 22–31].

[Niss 91a] Niss, Mogens: *Applications and modeling in School Mathematics—Directions for Future Development*, i Izaak Wirszup and Robert Streit (eds.): Developments in School Mathematics Education Around the World, vol.3, National Council of Teachers of Mathematics, Reston 1991.

[Niss 91b] Niss, Mogens og Werner Blum og Ian Huntley (ed.): *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, Ellis Horwood Ltd., 1991.

[Niss 93] Niss, Mogens: *Centrale problemstillinger i matematikkens didaktik i 1990'erne*, i E. Strandgaard-Andersen (ed.): *15. Nordiske LMFK-kongres*, LMFK, København, 1993.

[Niss 96] Niss, Mogens: *Goals of Mathematics Teaching*, i [Bishop 96].

[OECD 61] Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD): *New Thinking in School Mathematics*, OECD, 1961.

[Pedersen 94] Pedersen, Ove K. m.fl.: *Demokratiets lette tilstand*, Spektrum, 1994.

[Pilemann 96] Pilemann, Helle: *Retorik eller realitet? Anvendelser af matematik i det danske gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903–88*, Tekster fra IMFUFA 325, Roskilde Universitetscenter, 1996.

[Polya 57] Polya, G.: *How To Solve It*, 1. udgave 1945, 2. udgave 1957, genoptrykt af Penguin Books, 1990.

[Polya 62] Polya, G.: *Mathematical discovery*, John Wiley & Sons, 1962.

[RUC 96] Roskilde Universitetscenter: *Studieordning for Matematik af 1. september 1996*, RUCs Trykkeri, 1996.

[Schoenfeld 85] Schoenfeld, Alan H.: *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, 1985.

[Schoenfeld 87a] Schoenfeld, Alan H. (ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[Schoenfeld 87b] Schoenfeld, Alan: *Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview*, i [Schoenfeld 87a, pp. 1–31].

[Schoenfeld 87c] Schoenfeld, Alan: *What's All the Fuss about Metacognition?*, i [Schoenfeld 87a, pp. 189–215].

[Schoenfeld 92] Schoenfeld, Alan H.: *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics*, i [Grouws 92, pp. 334–70].

[Sfard 91] Sfard, Anna: *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of The Same Coin*, Educational Studies in Mathematics 22, pp. 1–36, 1991.

[SHF 88] Statens Humanistiske Forskningsråd: *Matematikundervisning; demokrati · kultur · højteknologi*, (rapport fra konferencen i Gilleleje maj 1987), Aarhus Universitetsforlag, 1988.

[SHF 89a] Statens Humanistiske Forskningsråd: *Gymnasiets matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav og demokratikrav* (rapport fra konferencen i Gilleleje i november 1988), IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, 1989.

[SHF 89b] Statens Humanistiske Forskningsråd: *Nye krav til matematikkundskaber* (rapport fra konferencen i Karlslunde i november 1988), IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, 1989.

[SHF 90] Statens Humanistiske Forskningsråd: *Matematikundervisning og demokrati* (rapport fra konferencen i Gilleleje i juni 1990), IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, 1990.

[SHF 92] Statens Humanistiske Forskningsråd: *Matematikundervisning og demokrati (II)* (rapport fra konferencen i Gilleleje i juni 1991), IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, 1992.

[Skemp 77] Skemp, Richard R.: *Relational Understanding and Instrumental Understanding*, Mathematics Teacher, no. 2, pp. 20–26, 1977.

[Skemp 86] Skemp, Richard R.: *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, 1971, 2. udgave 1986.

[Skovsmose 79] Skovsmose, Ole: *60'er-matematikken—Ide og virkelighed*, i [Bollerslev 79, pp. 152–66].

[Skovsmose 80] Skovsmose, Ole: *Forandringer i matematikundervisningen*, Gyldendal, 1980.

[Skovsmose 90a] Skovsmose, Ole: *Reflective knowledge: Its relation to the mathematical modelling proces*, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, vol. 21, no. 5, 1990.

[Skovsmose 90b] Skovsmose, Ole: *Ud over matematikken*, Systime, 1990.

[Skovsmose 94] Skovsmose, Ole: *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[Skovsmose 96] Skovsmose, Ole og Lene Nielsen: *Critical Mathematics Education*, i [Bishop 96, pp. 1257–88].

[SM 59] Statsministeriet, betænkning nr. 229: *Teknisk og naturvidenskabelig arbejdskraft—betænkning afgivet af den af statsministeriet nedsatte teknikerkommission*, Statsministeriet, 1959.

[Steiner 94] Steiner, Gerhard: *Network Theory: Applications to mathematics Education—A Microanalysis*, i [Biehler 94, pp. 247–61].

[UVM 60] Undervisningsministeriet, betænkning nr. 269: *Det nye Gymnasium—betænkning afgivet af det af undervisningsministeriet under 27. februar 1959 nedsatte læseplansudvalg for gymnasiet*, Undervisningsministeriet, 1960.

[UVM 78a] Undervisningsministeriet: *U-90 Samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne—bind I*, Undervisningsministeriet, 1978.

[UVM 78b] Undervisningsministeriet: *U-90 Samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne—bind II*, Undervisningsministeriet, 1978.

[UVM 97a] Undervisningsministeriet, bekendtgørelse nr. 354: *Bekendtgørelse om ændring af bekendtgørelse om gymnasiet, studenterkursus og enkeltfagsstudentereksamen*, Gymnasieafdelingen, 1997.

[UVM 97b] Undervisningsministeriet, vejledning nr. 22: *Vejledning for undervisning i Matematik*, Gymnasieafdelingen, 1997.

[Winsløv 97] Winsløv, Carl: *Matematikkens sproglighed som didaktisk potentiale*, Preprint Series, nr. 8, Matematisk Institut, Københavns Universitet, 1997.